Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

RELACIÓN ENTRE SUPER-CONTINUIDAD Y OTRAS CONTINUIDADES FUERTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Alejandra Naomi Garduño López

DIRECTORES DEL TRABAJO:

Dra. Mónica Sánchez Garrido

Dr. David Maya Escudero

Toluca, México, Fecha

UAEM

Índice general

Introducción

La continuidad es una de las herramientas más poderosas de las matemáticas. En décadas recientes se han introducido y estudiado diferentes variaciones de funciones continuas dada su importancia. En 1982 en [6], B. M. Munshi y D. S. Bassan introducen la noción de función super-continua. Esta clase de funciones es interesante ya que resulta ser una herramienta natural para estudiar espacios casi-compactos, espacios casi-regulares y espacios casi-completamente regulares. En [9], I. L. Reilly y M. K. Vamanamurthy trabajaron con las funciones super-continuas y definieron la clase de las funciones clopen continuas entre espacios topológicos. T. Noiri en [7] desarrolla el concepto de $\delta-$continuidad y fuerte θ-continuidad, ambos conceptos están íntimamente relacionados con la super-continuidad. De la misma manera, T. Noiri en [8] define a las funciones perfectamente continuas, las cuales son más fuertes que las clopen continuas. Por su parte C. W. Baker en [1] trabaja también en funciones completamente continuas y analiza la relación entre estas y otros tipos de funciones.

Se sabe que la clase de las funciones super-continuas está contenida estrictamente en la clase de las funciones continuas. La super-continuidad está contenida estrictamente entre la fuerte $\theta-$continuidad y la $\delta-$continuidad.

Y además, la super-continuidad está contenida estrictamente entre la continuidad completa y la $\delta-$continuidad.

En [9], I. L. Reilly y M. K. Vamanamurthy prueban que la super-continuidad y la continuidad son iguales cuando dotan al espacio dominio con la topología semi-regular. Además, estudian la relación de las funciones super-continuas con las funciones casi-continuas y con las funciones casi-abiertas.

Finalmente, uno de los principales problemas en la topología general es determinar la relación entre diferentes clases de funciones. Este es el eje principal que regirá la presente alrededor de las propiedades que cumplen dichas clases de funciones y las propiedades que satisfacen los espacios entre las funciones. De forma secundaria, se analizarán los conjuntos $\delta-$abiertos y los abiertos-regulares, así como los espacios semi-regulares y también la topología semi-regular y la $\delta-$cociente, entre otras.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presentan conceptos y resultados básicos de topología que son necesarios para la comprensión de la tesis. En el Capítulo 2, están la topología de semi-regularización, la quasi-topología y la $\delta-$topología las cuales más adelante nos ayudan a dar relaciones entre los diferentes tipos de continuidades. En el Capítulo 3, se presentan unas de las definiciones y resultados más importantes en esta tesis, la continuidad y la super continuidad. En el Capítulo 4, se encuentran otro tipo de continuidades como la casi continuidad y clopen continuidad. Finalmente, en el Capítulo 5, están otros tipos de continuidades conocidas como continuidades fuertes, por ejemplo, perfectamente continua, fuerte continua, $\delta-$continua, entre otras.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Se define y denota por $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ al **conjunto potencia** de X.

Definición 1.2. Sea X un conjunto. Una familia $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **topología** para X, si τ_X satisface las siguientes condiciones:

1. $\emptyset$ y X están en τ_X,
2. La unión de cualquier familia de elementos de τ_X está en τ_X,
3. La intersección finita de elementos de τ_X está en τ_X.

Mientras no haya confusión con τ y τ_X usaremos τ sin distinción en el espacio.

Definición 1.3. Si X es un conjunto y τ es una topología para X, entonces (X, τ) es un **espacio topológico**. A los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos** o simplemente **abiertos**.

Los ejemplos clásicos que podemos encontrar en cualquier libro de Topología, y en esta tesis, son los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1.4. Sean X un conjunto y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Es claro que $\emptyset, X \in \tau$. Ahora notemos que $\emptyset \cup X = X \in \tau$ y $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau$. Por lo tanto, τ es una topología para X.

Ejemplo 1.5. Sean X un conjunto y $\tau = \mathcal{P}(X)$. Dado que $\emptyset \subseteq X$ y $X \subseteq X$, se tiene que $\emptyset$ y X son elementos de τ. Si $\mathcal{A}$ es una familia finita de subconjuntos de X, se cumple que $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq X$ y $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq X$. Por lo que τ es una topología para X.

La topología del Ejemplo 1.4 es llamada **Topología trivial o indiscreta** y la topología del Ejemplo 1.5 es llamada **Topología discreta** y se denota por τ_{dis}. Con estos dos ejemplos queda claro que a cualquier conjunto siempre se le puede dotar de al menos dos topologías, la discreta y la indiscreta.

Ejemplo 1.6. Sean $X = \{x, y\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Por definición de τ vemos que $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$. Por otro lado, $\emptyset \cup \{x\} = \{x\} \in \tau$, $\{x\} \cup X = X \in \tau$, $\emptyset \cup \{x\} \cup X = X \in \tau$, $\emptyset \cup X = X \in \tau$, $\emptyset \cap \{x\} = \emptyset \in \tau$, $\emptyset \cap \{x\} \cap X = \emptyset \in \tau$, $\{x\} \cap X = \{x\} \in \tau$. Con esto hemos demostrado que τ es una topología para X.

El espacio (X, τ) del Ejemplo 1.6 es llamado el espacio de Sierpinsky.

Ejemplo 1.7. Sea $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ y τ definida como $\tau = \{A \subseteq [-1,1] : 0 \notin A$ o $(-1,1) \subseteq A\}$.

Por como está definida tenemos que $\emptyset$ y $[-1,1]$ están en τ. Sea $\mathcal{A}$ una familia de elementos de τ. Si todos los elementos de la familia son de los que no contienen a 0, entonces $0 \notin \bigcup \mathcal{A}$, y así $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. Por otro lado si uno de ellos es de los que contienen a $(-1,1)$, entonces $(-1,1) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. De modo que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. Ahora sean $A, B \in \tau$. Supongamos que $0 \notin A, B$, entonces $0 \notin A \cap B$. Sin perdida de generalidad supongamos que $0 \notin A$ y $(-1,1) \subseteq B$, De esto $0 \notin A \cap B$. Por último, si suponemos que $(-1,1) \subseteq A, B$, entonces $(-1,1) \subseteq A \cap B$. Por lo tanto, τ es una topología para $[-1,1]$.

Ejemplo 1.8. Sea X un conjunto y $\tau_{cof} = \{A \subseteq X : X - A$ es finito o $A = \emptyset\}$. Notemos que $X \in \tau_{cof}$, pues $X - X = \emptyset$ y por como está definida τ_{cof}, $\emptyset \in \tau_{cof}$. Ahora sea $\mathcal{A}$ una familia de elementos de τ_{cof}. Elegimos $A \in \mathcal{A}$. Tenemos que $X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcap X - A$ y $X - A$ es finito. De lo anterior, $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito, por lo que pertenece a τ_{cof}. Por último sean $A, B \in \tau_{cof}$. Entonces $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$, pero sabemos que $(X - A)$ y $(X - B)$ son finitos por lo que su unión es finita. Así $X - (A \cap B)$ es un conjunto finito, es decir $A \cap B \in \tau_{cof}$.

La topología del Ejemplo 1.8 es llamada **Topología Cofinita** y se denota por τ_{cof}.

Seguramente hemos escuchado que $\tau_u = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ es una topología para $\mathbb{R}$ y lo primero que pensamos es que entonces se cumplen las tres condiciones de la definición 1.2. ¿Esto es cierto? Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9. Sea $\tau_u = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Consideremos $a < b < c < d$ y $(a,b), (c,d) \in \tau_u$.

Notemos que $(a,b) \cup (c,d) \notin \tau_u$, entonces τ_u no cumple la segunda condición de la definición 1.2. Por lo que τ_u no es una topología para $\mathbb{R}$.

Para aclarar el hecho de si τ_u del Ejemplo 1.9 es o no una topología para $\mathbb{R}$ tenemos que ver algunas definiciones.

Definición 1.10. Sea X un conjunto. Una **base para una topología** para X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$,

2. Si $x \in B_1 \cap B_2$ con B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Los elementos de $\mathcal{B}$ son llamados **básicos**.

Ejemplo 1.11. Sean (X, τ_{dis}) un espacio topológico discreto y $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para X.

Definición 1.12. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología de X. Se define la **topología τ generada por $\mathcal{B}$** como: $U \in \tau$ si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

Ejemplo 1.13. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^n$ el espacio euclideo de dimensión n. Si $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se define la bola de radio ϵ con centro en x como

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| < \epsilon\}$$

Entonces $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}$ es una base para una topología de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, es claro que si $x \in \mathbb{R}^n$, para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $x \in B_\epsilon(x)$. Por lo que la primera condición de la definición de base se satisface.

Ahora supongamos que $x \in B_\epsilon(y) \cap B_\delta(z)$ donde $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ y $y, z \in \mathbb{R}^n$. Definamos $\gamma = \frac{\text{mín}\{\epsilon - ||y-x||, \delta - ||z-x||\}}{2}$. Dado que $||y-x|| < \epsilon$ y $||z-x|| < \delta$, se tiene que $\epsilon - ||y-x|| > 0$ y $\delta - ||z-x|| > 0$, por lo que $\gamma > 0$.

Sea $w \in B_\gamma(x)$. Por definición, $||w-x|| < \gamma \leq \epsilon - ||y-x||$. Luego

$$||w-x|| < \epsilon - ||y-x||.$$

Entonces

$$||w-x|| + ||y-x|| < \epsilon$$

Esto implica que

$$||w-x|| + ||x-y|| < \epsilon.$$

Por la desigualdad triangular, se sigue que

$$||w-x+x-y|| < \epsilon.$$

Concluimos que

$$||w-y|| < \epsilon$$

De donde $w \in B_\epsilon(y)$. Además, $||w-x|| < \gamma \leq \delta - ||z-x||$. De aquí que

$$||w-x|| < \delta - ||z-x||.$$

Entonces

$$||w - x|| + ||z - x|| < \delta.$$

Así, se obtiene que

$$||w - x|| + ||x - z|| < \delta.$$

Por la desigualdad triangular, se sigue que

$$||w - x + x - z|| < \delta.$$

Por lo tanto

$$||w - z|| < \delta.$$

Lo anterior implica que $w \in B_\delta(z)$. Con esto hemos demostrado que $B_\gamma(x) \subseteq B_\epsilon(y) \cap B_\delta(z)$. Cumpliendose la segunda condición de la definición de base para una topología.

A la topología generada por la base $\mathcal{B}$ del Ejemplo 1.13 se le llama **topología usual** para $\mathbb{R}^n$.

Si $n = 1$ en el ejemplo 1.13, entonces $\mathcal{B} = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) : x \in \mathbb{R} \text{ y } \epsilon > 0\}$, la cual es la base que genera a la topología τ_u del ejemplo 1.9. Por eso es que conocemos a τ_u como la **topología usual de** $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.14. $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$ es base para una topología para $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Observemos que x pertenece al intervalo $U = [x, x+\epsilon) \in \mathcal{B}$. Dados $B_1 = [a, b)$ y $B_2 = [c, d)$ en $\mathcal{B}$. Supongamos que $b < c$, así $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Ahora supongamos que $a < c < b < d$, entonces $B_1 \cap B_2 = [c, b) \in \mathcal{B}$. Por último sin pérdida de generalidad supongamos que $B_1 \subseteq B_2$, por lo que $B_1 \cap B_2 = B_1$.

A la topología generada por la base $\mathcal{B}$ del Ejemplo 1.14 se le llama **topología de Sorgenfrey** para $\mathbb{R}$.

Definición 1.15. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X es cerrado si $X - A$ es un abierto.

Ejemplos fáciles de conjuntos cerrados son:

- Si (X, τ) es un espacio indiscreto, entonces X es un cerrado de (X, τ).
- Si (X, τ_{dis}) es un espacio discreto y $a \in X$, entonces $X - \{a\}$ es un cerrado de (X, τ_{dis}).
- Si (X, τ) es un espacio de Sierpinsky, entonces $\{y\}$ es un cerrado de (X, τ), ver Ejemplo 1.6.
- $\{0\}$ es un cerrado de $([-1, 1], \tau)$, ver Ejemplo 1.7.
- $\{-1\}$ es un cerrado de $([-1, 1], \tau)$, ver Ejemplo 1.7.
- $(-\infty, 5] \cup [8, \infty)$ es un cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
- $(-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{6}{5}\right] \cup [7, \infty)$ es un cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
- $[0, \infty)$ es un cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Dado que la definición de cerrado está íntimamente relacionado con el concepto de abierto, se tiene un resultado inmediato de éstas definiciones y de la definición de topología, veamos la siguiente proposición.

Proposición 1.16. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de (X, τ), entonces*

1. $\emptyset$ *y* X *son cerrados,*

2. La intersección de cualquier familia de elementos de $\mathcal{F}$*, está en* $\mathcal{F}$*,*

3. La unión finita de elementos de $\mathcal{F}$*, está en* F*.*

Demostración. 1. Como $X = X - \emptyset$ y $\emptyset$ es abierto, entonces X es cerrado. Dado que X es abierto y $\emptyset = X - X$, se tiene que $\emptyset$ es cerrado.

2. Notemos que $X - \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} (X - F)$. Para cada $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $X - F$ es abierto, luego $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} (X - F)$ es un abierto. De aquí que $X - \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es también un abierto. Por lo tanto $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es un cerrado.

3. Consideremos $F_1, F_2, \ldots F_n \in \mathcal{F}$. Dado que $X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$ y $X - F_i$ es abierto para cada F_i, se sigue que $X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es abierto. Lo cual implica que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es un cerrado.

$\square$

Definición 1.17. Un subconjunto A de un espacio X es llamado **clopen** si es abierto y cerrado.

Definición 1.18. Dado un espacio topológico (X, τ), definimos **el interior** de un conjunto A de X como $int(A) = \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\}$.

La siguiente observación es inmediata de la definición de topología y de la definición de interior de un conjunto.

Observación 1.19. Si A es un subconjunto de X, entonces $\bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\}$ es abierto, es decir, $int(A)$ es un conjunto abierto de X contenido en A.

Definición 1.20. Sea (X, τ) un espacio topológico, **la cerradura** del conjunto A de X se define como $cl(A) = \bigcap\{F \subseteq X : F$ es cerrado en (X, τ) y $A \subseteq F\}$.

Así como el interior de un conjunto resultó ser un conjunto abierto, también se tiene que la cerradura de cualquier conjunto es un conjunto cerrado.

Muchas veces se usan equivalencias a la definición de cerradura de un conjunto, en esta tesis también ocasionalmente usaremos alguna de las siguientes equivalencias.

Proposición 1.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $A \subseteq X$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *El punto x pertenece a $cl(A)$.*
2. *Para todo abierto U que contenga a x, se tiene que, $U \cap A \neq \emptyset$.*
3. *Existe una base local $\mathcal{B}$ de x de tal modo que para todo $U \in \mathcal{B}$, se verifica que $U \cap A \neq \emptyset$.*

La demostración de la Proposición 1.21 se puede consultar en [3, Proposición 1.1.1, pág. 13].

En la siguiente proposición enunciaremos algunas propiedades que satisfacen el interior y la cerradura de un conjunto.

Proposición 1.22. *Sean (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Cada una de las siguientes condiciones se cumplen.*

1. $int(A) \subseteq A \subseteq cl(A)$.

2. $cl(cl(A)) = cl(A)$.

3. $int(int(A)) = int(A)$.

4. $int(X - A) = X - cl(A)$.

5. $X - int(A) = cl(X - A)$.

6. *A es un subconjunto abierto de X si y sólo si* $int(A) = A$.

7. *A es un subconjunto cerrado de X si y sólo si* $A = cl(A)$.

8. $cl(\emptyset) = \emptyset$.

9. $int(X) = X$.

Demostración. 1. Resulta de la definición.

2. $\subseteq]$ Sea $x \in cl(cl(A))$, entonces x está en todo conjunto cerrado de X que contiene a $cl(A)$ y como $A \subseteq cl(A)$, entonces x está en todo conjunto cerrado de X que contiene a A. Por lo tanto, $x \in cl(A)$.
   $\supseteq]$ Por el inciso 1 resulta esta contención.

3. $\subseteq]$ Por el inciso 1 resulta esta contención.
   $\supseteq]$ Sea $x \in int(A)$. Por la Observación 1.19, $int(A)$ es un conjunto abierto de X. Dado que $x \in int(A) \subseteq int(A)$, se sigue que $x \in int(int(A))$.

4. $\subseteq]$ Sea $x \in int(X - A)$, por definición existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \subseteq X - A$. Así, U no intersecta a A, por lo que $x \notin cl(A)$, es decir, $x \in X - cl(A)$.

$\supseteq$] Sea $x \in X - cl(A)$, así, $x \notin cl(A)$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y su intersección con A es vacío, con esto podemos decir que $U \subseteq X - A$, y por definición de interior podemos decir que $x \in int(X - A)$. Por lo tanto $int(X - A) = X - cl(A)$.

5. $\subseteq$] Sea $x \in X - int(A)$, entonces, $x \notin int(A)$, es decir, cualquier conjunto abierto V de X tal que $x \in V$ cumple que $V \nsubseteq A$. Esto implica que $V \cap (X - A) \neq \emptyset$. Por definición de cerradura se tiene que $x \in cl(X - A)$.

   $\supseteq$] Sea $x \in cl(X - A)$. Supongamos que $x \in int(A)$, entonces para cada abierto U que contenga a x se tiene que $U \subseteq A$. Por lo que $U \cap (X - A) = \emptyset$. Lo cual contradice nuestra hipótesis. Entonces $x \in X - int(A)$. Por lo tanto $X - int(A) = cl(X - A)$.

6. $\Rightarrow$] Supongamos que A es un subconjunto abierto de X. Por el inciso 1 tenemos que $int(A) \subseteq A$. Dado que A es un subconjunto abierto en X y por definición de interior tenemos que $A \subseteq int(A)$. Por lo que $int(A) = A$.

   $\Leftarrow$] Supongamos que $int(A) = A$. Entonces para cada $x \in A$, existe un subconjunto abierto U tal que $x \in U$ y $U \subseteq A$, con esto se satisface la definición y podemos decir que A es un subconjunto abierto de X.

7. $\Rightarrow$] Supongamos que A es un subconjunto cerrado en X. Por el inciso 1 tenemos que $A \subseteq cl(A)$. Por otro lado, como A es cerrado en X y $cl(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño, entonces $cl(A) \subseteq A$, por lo tanto $A = cl(A)$.

   $\Leftarrow$] Supongamos que $A = cl(A)$, entonces $X - A = X - cl(A)$. Por el inciso 2 tenemos que $X - cl(A) = int(X - A)$, pero $int(X - A)$ es un conjunto abierto. Luego $X - cl(A)$ es un abierto, es decir $X - A$ es un abierto. Por lo tanto A es un subconjunto cerrado.

8. Sabemos que $\emptyset$ es un conjunto cerrado en X. Por inciso 7, se tiene que $cl(\emptyset) = \emptyset$.

9. Dado que X es un subconjunto abierto de X, el inciso 6 implica que $X = int(X)$.

$\square$

Conocer cómo se comportan la cerradura e interior de conjuntos dentro de un espacio topológico nos proporciona herramientas esenciales para el estudio y análisis de dichos conjuntos. Veámos una proposición con más de estas propiedades.

Proposición 1.23. *Sean (X, τ) un espacio topológico y, A y B subconjuntos de X. Cada una de las siguientes condiciones se cumplen.*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $int(A) \subseteq int(B)$.*
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.*
3. *$cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$.*
4. *$cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.*
5. *$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.*

Demostración. 1. Sea $x \in int(A)$. Por definición existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \subseteq A$. Dado que $A \subseteq B$, se tiene que $x \in U \subseteq B$. Por lo que $x \in int(B)$.

2. Sabemos que $B \subseteq cl(B)$. Así, $A \subseteq cl(B)$. Dado que $cl(B)$ es un conjunto cerrado en X que contiene a A, se tiene que $cl(A) \subseteq cl(B)$.

3. Sabemos que $A \cap B \subseteq A$, por el inciso anterior tenemos que $cl(A \cap B) \subseteq cl(A)$. Lo mismo pasa con B, por lo que $cl(A \cap B) \subseteq cl(B)$. Con esto se obtiene que $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$.

4. Dado que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, usando el inciso 2, tenemos que $cl(A) \subseteq cl(A \cup B)$ y $cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$. Entonces $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$. Ahora, por inciso 1 del Teorema 1.22 tenemos que $A \subseteq cl(A)$ y $B \subseteq cl(B)$, entonces $A \cup B \subseteq cl(A) \cup cl(B)$. Esto es, $cl(A) \cup cl(B)$ es un conjunto cerrado en X que contiene a $A \cup B$. Por lo que $cl(A \cup B) \subseteq cl(A) \cup cl(B)$.

5. $\subseteq$] Sabemos que $int(A \cap B) \subseteq int(A)$ e $int(A \cap B) \subseteq int(B)$, es decir, $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$.

   $\supseteq$] Por inciso 1 del Teorema 1.22 sabemos que $int(A) \subseteq A$ y $int(B) \subseteq B$, entonces $int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$. De lo anterior, $int(A) \cap int(B)$ es un conjunto abierto en X contenido en $A \cap B$. Por lo que $int(A) \cap int(B) \subseteq int(A \cap B)$. Por lo que $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$.

□

Algunas consecuencias inmediatas que se tienen, y que estaremos utilizando en la siguiente sección se enlistan en el siguiente corolario.

Corolario 1.24. *Sean (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Cada una de las siguientes condiciones se cumplen.*

1. $int(cl(A)) \subseteq cl(A)$

2. $int(A) \subseteq int(cl(A))$

3. $int(A) \subseteq cl(int(A))$

4. $cl(intA) \subseteq cl(A)$.

1.2. Conjuntos abiertos regulares y conjuntos cerrados regulares

En la sección anterior vimos ejemplos y propiedades de conjuntos abiertos y de conjuntos cerrados, en esta sección presentamos a otro tipo de abiertos y otro tipo de cerrados, los llamados abiertos regulares y cerrados regulares.

Los abiertos regulares y cerrados regulares proporcionan una visión más profunda y refinada de la topología de los espacios. Ayudan a identificar conjuntos que son "estables" bajo operaciones de interior y cerradura, lo cual es útil en varias áreas de la matemática.

Definición 1.25. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Si $A = int(cl(A))$, A es llamado **abierto regular** de X.

De la Observación 1.19, se tiene que todo abierto regular es un abierto.

Ejemplo 1.26. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, con τ_{sor} la topología de Sorgenfrey generada por la base $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$, (ver Ejemplo 1.14). Si $A = [a, b)$, entonces A es un conjunto abierto y cerrado de $\mathbb{R}$, por lo que $A = int(cl(A))$, es decir, A es un abierto regular.
Ahora tomamos $B = (0, 1)$. Notemos que $cl(B) = [0, 1)$. Así $int(cl(B)) = int([0, 1)) = [0, 1)$. Por lo que B no es un abierto regular.

Ejemplo 1.27. Sea τ_{cof} la topología cofinita en un espacio X infinito. Tomamos un punto p en X y $A = X - \{p\}$. Probaremos que $p \in cl(A)$. Sea $U \in \tau_{cof}$ tal que $p \in U$. Entonces existe $F \subseteq X$ finito tal que $U = X - F$. Supongamos que $U \cap A = \emptyset$. Entonces $(X - F) \cap (X - \{p\}) = \emptyset$, así $X - (F \cup \{p\}) = \emptyset$. Por lo que $X = F \cup \{p\}$, esto contradice el hecho de que X es infinito. Concluimos que $p \in cl(A)$. Con esto $cl(A) = X$ y $int(cl(A)) = int(X) = X$. Por lo que A no es un abierto regular.

Ejemplo 1.28. Tomamos $A = (0, 1) \in \tau_u$. Notemos que A es abierto regular pues $cl(A) = [0, 1]$ y $int(cl(A)) = (0, 1)$, por lo que $A = int(cl(A))$.
Ahora si $B = (0, 1) \cup (1, 2)$ entonces B no es abierto regular pues $cl(B) = [0, 2]$ y $int(cl(B)) = (0, 2)$, por lo que $B \neq int(cl(B))$.

El ejemplo 1.28 nos muestra que:

Observación 1.29. La unión de dos abiertos regulares no necesariamente es un abierto regular.

El siguiente teorema nos garantiza que la intersección de dos abiertos regulares siempre es un abierto regular.

Teorema 1.30. *Si A, B son abiertos regulares en un espacio (X, τ), entonces $A \cap B$ es abierto regular de X.*

Demostración. Mostraremos que $A \cap B = int(cl(A \cap B))$.

$\subseteq]$ Por inciso 1 del Teorema 1.22, sabemos que $A \cap B \subseteq cl(A \cap B)$ y $A \cap B = int(A \cap B) \subseteq int(cl(A \cap B))$.

$\supseteq]$ Sabemos que $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$. De esto se sigue que $int(cl(A \cap B)) \subseteq int(cl(A) \cap cl(B))$. Por el inciso 5 de la Proposición 1.23,

$int(cl(A) \cap cl(B)) = int(cl(A)) \cap int(cl(B)) = A \cap B$. Así $int(cl(A \cap B)) \subseteq A \cap B$.

Por lo tanto $A \cap B = int(cl(A \cap B))$. $\square$

En la literatura es bien conocido que si V es un subconjunto de un espacio topológico y W es un abierto, entonces $V \cap W$ es un abierto de V. Más información de estos abiertos, llamados abiertos relativos, se puede encontrar en [4]. Si desearamos escribir un resultado análogo al mencionado anteriormente, pero con abiertos regulares debería ser:

"Si V es un abierto en un espacio (X, τ) y W es un abierto regular de (X, τ), entonces $V \cap W$ es un abierto regular."

Sin embargo, esto no es cierto. Para ello, sean $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $W = (0, 2)$ y $V = (0, 1) \cup (1, 2)$. Notemos que W es abierto regular y V es abierto, pero $W \cap V = V$ no es abierto regular de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

La siguiente proposición nos dice como podemos generar abiertos regulares en cualquier espacio topológico.

Proposición 1.31. *Si V es un abierto en un espacio (X, τ), entonces $W = int(cl(V))$ es un abierto regular tal que $V \subseteq W \subseteq cl(V)$.*

Demostración. Como $int(cl(V)) \subseteq cl(V)$, se sigue que $W \subseteq cl(V)$. Ahora demostremos que $V \subseteq W$. Como $V \subseteq cl(V)$ entonces $int(V) \subseteq int(cl(V))$, pero $V = int(V)$ pues $V \in \tau$, por lo que $V \subseteq int(cl(V))$. Hemos demostrado que $V \subseteq W \subseteq cl(V)$.

Para demostrar que W es un abierto regular tenemos por un lado que $W = int(cl(V)) \subseteq cl(V)$, entonces $cl(W) \subseteq cl(cl(V)) = cl(V)$ y con esto $int(cl(W)) \subseteq int(cl(V))$, es decir, $int(cl(W)) \subseteq W$.

Dado que hemos probado que $V \subseteq W$, se sigue que $cl(V) \subseteq cl(W)$ entonces $int(cl(V)) \subseteq int(cl(W))$, con esto $W \subseteq int(cl(W))$. Por lo tanto W es un abierto regular. $\square$

La definición que enunciamos a continuación está íntimamente relacionada con los espacios hiperconexos y en los espacios hiperconexos sólo existen dos abiertos regulares, pero no nos adelantemos más y vayamos paso a paso.

Definición 1.32. Un conjunto A de un espacio (X, τ) es **denso** en X si $cl(A) = X$.

Un ejemplo muy básico de conjunto denso es el siguiente.

Ejemplo 1.33. Notemos que $\mathbb{I}$, el conjunto de los números irracionales, satisface que $cl(\mathbb{I}) = \mathbb{R}$ por lo que $\mathbb{I}$ es un conjunto denso de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Ejemplos de conjunto no densos en un espacio topológico son los siguientes.

Ejemplo 1.34. Sea X un conjunto infinito dotado con la topología cofinita τ_{cof}. Notemos que para cualquier subconjunto infinito A, se tiene que $cl(A) = X$ y si A es un conjunto finito, entonces $cl(A) = A$. Con esto vemos que los únicos subconjuntos densos de X son sus subconjuntos infinitos.

Ejemplo 1.35. Sea $X = \{a, b, c\}$, con la topología discreta, todos los subconjuntos propios no vacíos no son densos.

Ahora presentamos la definición de espacio hiperconexo.

Definición 1.36. Un espacio (X, τ) es **hiperconexo**, si todo abierto no vacío es denso.

Parece fácil la definición de hiperconexo ¿verdad?. Como siempre después de una definición, vamos con ejemplos.

Ejemplo 1.37. Sean $X = \{x, y\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. El espacio de Sierpinsky, (X, τ) es hiperconexo ya que si tomamos a $\{x\}$, se tiene que $cl(\{x\}) = X$, es decir, $\{x\}$ es denso, y claramente $\{x\}$ es un abierto no vacío. Por lo que (X, τ) es hiperconexo.

Ejemplo 1.38. Sean $X = \{0, 1, 2\}$ y $\tau = \{U \subseteq X : 1 \notin U\} \cup \{X\}$. El espacio (X, τ) no es hiperconexo, dado que $\{0\} \in \tau$ y $cl(\{0\}) = \{0, 1\}$.

Ejemplo 1.39. Sea (X, τ_{cof}) con X infinito. Del argumento presentado en Ejemplo 1.34 se sigue que los abiertos son densos. Por lo tanto, (X, τ_{cof}) es hiperconexo.

El siguiente teorema nos dice cuales son los únicos abiertos regulares que tiene un espacio hiperconexo.

Teorema 1.40. *Si (X, τ) es un espacio hiperconexo entonces los únicos abiertos regulares son $\emptyset$ y X.*

Demostración. Sea $U \in \tau$ tal que U es abierto regular y $U \neq \emptyset$. Como U es denso tenemos que $cl(U) = X$. Del hecho de que U es abierto regular, se tiene que $U = int(cl(U)) = int(X) = X$, por lo tanto $U = X$. $\square$

Así como regularmente se definen los conjuntos cerrados después de los conjuntos abiertos, de la misma manera se pueden considerar a los conjuntos cerrados regulares.

Definición 1.41. Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si $A = cl(int(A))$, A es llamado **cerrado regular** de X.

Es claro de la definición de cerrado regular que todo cerrado regular es un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.42. Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Tomamos $A = [0,1]$, tenemos que $int(A) = (0,1)$ y $cl(int(A)) = [0,1]$. Por lo que A es cerrado regular. Ahora si $B = [0,1] \cup [2,3]$, entonces $int(B) = (0,1) \cup (2,3)$ y $cl(int(B)) = B$. Por lo que B es cerrado regular. Por último tomemos $C = \{0\}$. Observemos que $x \in int(C)$ si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq C$. Entonces $int(C) = \emptyset$. Además $cl(int(C)) = \emptyset$ y así podemos decir que C no es cerrado regular.

Análogamente a la Proposición 1.31 tenemos un resultado con cerrados regulares el cual enunciamos y demostramos a continuación.

Proposición 1.43. *Si F es un conjunto cerrado en un espacio (X, τ), entonces $U = cl(int(F))$ es un cerrado regular tal que $int(F) \subseteq U \subseteq F$.*

Demostración. Por el inciso 1 del Teorema 1.22 tenemos que $int(F) \subseteq cl(int(F))$, es decir, $int(F) \subseteq U$. Nuevamente por el Teorema 1.22 tenemos que $int(F) \subseteq F$, entonces $cl(int(F)) \subseteq cl(F) = F$, así $U \subseteq F$. Finalmente, probaremos que U es cerrado regular, es decir, $cl(int(U)) = U$

$\subseteq$] Dado que $U \subseteq F$, se tiene que $int(U) \subseteq int(F)$, de esto, $cl(int(U)) \subseteq cl(int(F)) = U$.

$\supseteq$] Como $int(F) \subseteq U$, se sigue que $int(int(F)) \subseteq int(U)$. Más aún, sabemos que $int(int(F)) = int(F)$, por lo que $int(F) \subseteq int(U)$. Lo anterior implica que $cl(int(F)) \subseteq cl(int(U))$, es decir, $U \subseteq cl(int(U))$.

Por lo tanto $cl(int(U)) = U$. $\square$

Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto, en el siguiente teorema tenemos un resultado similar, pero con abiertos regulares y cerrados regulares.

Teorema 1.44. *Si A es un abierto regular en un espacio (X, τ), entonces $X - A$ es un cerrado regular de X.*

Demostración. Dado que A es un abierto regular, $A = int(cl(A))$, entonces $X - A = X - (int(cl(A))) = cl(X - cl(A)) = cl(int(X - A))$. Por lo tanto $X - A = cl(int(X - A))$, es decir, $X - A$ es cerrado regular de X. $\square$

El siguiente corolario es un resultado inmediato de los Teoremas 1.40 y 1.44.

Corolario 1.45. *Si (X, τ) es un espacio topológico hiperconexo, entonces los únicos subconjuntos cerrados regulares de X son $\emptyset$ y X.*

Por el Teorema 1.40 y el Corolario 1.45 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.46. *Si (X, τ) es un espacio topológico hiperconexo, entonces los únicos subconjuntos que son abiertos regulares y cerrados regulares de X son $\emptyset$ y X.*

El siguiente resultado es consecuencia de las definiciones de abierto, cerrado, abierto regular y cerrado regular.

Corolario 1.47. *Cualquier clopen es abierto regular y cerrado regular.*

Demostración. Sea A un clopen de un espacio X. Sabemos que $cl(A) = A$ pues A es clopen y $int(cl(A)) = int(A) = A$. Por lo que $int(cl(A)) = A$. De manera similar se demuestra que todo clopen es cerrado regular. $\square$

Definición 1.48. Sea (X, τ) es un espacio topológico. Si $A \subseteq X$ es un abierto regular y un cerrado regular de X diremos que A es un **clopen regular**.

Anteriormente hemos comentado que todo abierto regular es un conjunto abierto y todo cerrado regular es un conjunto cerrado, por lo que se tiene la siguiente observación.

Observación 1.49. Todo subconjunto clopen regular es abierto y cerrado.

Un resultado interesante relacionado con el Corolario 1.46 y con la definición de clopen es el siguiente.

Teorema 1.50. *Sea (X, τ) es un espacio topológico. Si los únicos subconjuntos de X que son clopen regulares son $\emptyset$ y X, se tiene que X es hiperconexo.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de X no vacío. Por la Proposición 1.31 sabemos que $A \subseteq int(cl(A))$ y que $int(cl(A))$ es un abierto regular. Por hipótesis se tiene que $int(cl(A)) = \emptyset$ o $int(cl(A)) = X$. Como $\emptyset \neq A \subseteq int(cl(A))$, entonces $int(cl(A)) = X$, es decir, A es un conjunto denso. Por lo que X es hiperconexo. $\square$

El Teorema 1.50 es análogo a la definición de espacios conexos que enunciamos a continuación.

Definición 1.51. Un espacio topológico (X, τ) es **conexo** si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X son $\emptyset$ y X.

Ahora veamos otra definición relacionada a la conexidad de un conjunto.

Definición 1.52. Un espacio (X, τ) es **extremadamente disconexo** si para todo $A \in \tau$, $cl(A) \in \tau$.

Corolario 1.53. *Si X es un espacio hiperconexo, entonces X es extremadamente disconexo.*

Demostración. Sea A un abierto no vacío. Como X es hiperconexo, entonces $cl(A) = X$. Claramente X es abierto, lo cual implica que $cl(A)$ es abierto. □

El regreso del Corolario 1.53 no necesariamente es cierto, es decir, no todo espacio extremadamente disconexo es hiperconexo. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.54. Sea $X = \{0, 1\}$. Probaremos que (X, τ_{dis}) es extremadamente disconexo, pero no es hiperconexo.
La topología discreta es de la siguiente forma $\tau_{dis} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Notemos que para todo $A \in \tau_{dis}$, $cl(A) = A$, es decir, $cl(A) \in \tau_{dis}$. Por lo que (X, τ_{dis}) es extremadamente disconexo. Por otro lado (X, τ_{dis}) no es hiperconexo, pues $cl(\{0\}) = \{0\} \neq \{0, 1\}$.

Sin embargo, si a la condición de extremadamente disconexo le sumamos que el espacio sea conexo, entonces tenemos que el espacio es hiperconexo.

Proposición 1.55. *Si (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo y conexo, entonces (X, τ) es hiperconexo.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto no vacío. Como X es extremadamente disconexo, $cl(U)$ es un abierto, es decir, $cl(U)$ es un clopen. Dado que X es conexo y $cl(U) \neq \emptyset$, se tiene entonces que $cl(U) = X$. Con lo cual U es denso. $\square$

Capítulo 2

Otras Topologías

En el estudio de los espacios topológicos, uno de los objetivos es entender cómo se pueden modificar o refinar las topologías para obtener ciertas propiedades deseadas. Una herramienta útil en este contexto es la topología de semirregularización. Esta topología proporciona una forma de modificar una topología existente para lograr una topología que sea más manejable o que cumpla con ciertos criterios de regularidad, sin cambiar demasiado la estructura original del espacio.

2.1. Topología de Semiregularización

Definición 2.1. Sean τ_1 y τ_2 topologías para X. Diremos que τ_1 es **más gruesa** que τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Teorema 2.2. *La familia de subconjuntos abiertos regulares de un espacio topológico (X, τ) es una base para una topología para X que es más gruesa que τ.*

Demostración. Primero veamos que cada punto de X está contenido en al menos un conjunto de la base. Notemos que X es un abierto regular, es decir, para cualquier $x \in X$, x está contenido en al menos un abierto regular.

Por el Teorema 1.30 la intersección de dos abiertos regulares es un abierto regular, por lo que la familia de subconjuntos abiertos regulares de un espacio topológico (X, τ) es una base para una topología para X.

Ahora, cada abierto regular de X es un elemento de τ. Esto implica que cada elemento de la base es un elemento de τ. Por lo tanto, la topología que tiene por base la colección de los subconjuntos abiertos regulares es más gruesa que τ. □

Mostraremos que la contención entre las topologías del teorema anterior puede ser propia.

Ejemplo 2.3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Sea A un subconjunto no vacío de X y $(x, y) \in A$. Diremos que (x, y) es un punto interior de A si $y > 0$ y existe $\varepsilon \in (0, y)$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq A$, o bien $y = 0$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{(x, y)\} \cup ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (0, \varepsilon)) \subseteq A$. Diremos que $A \in \tau$ si cada uno de sus puntos es interior de sí mismo. La topología τ es conocida como **la topología del medio disco**.

Sea $\delta > 0$ y $W = \{(0, 0)\} \cup (-\delta, \delta) \times (0, \delta)$. Probaremos que $cl(W) = [-\delta, \delta] \times [0, \delta]$.

Primero, para ver que $[-\delta, \delta] \times \{0\} \subseteq cl(W)$, sea $z \in [-\delta, \delta]$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos que $V_\varepsilon = \{(z, 0)\} \cup ((z - \varepsilon, z + \varepsilon) \times (0, \varepsilon))$ es un abierto de X que contiene a $(z, 0)$. Tomemos $w \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ y $\lambda = \frac{1}{2} \min\{\delta, \varepsilon\}$. Entonces $(w, \lambda) \in W \cap V_\varepsilon$. Esto demuestra que $(z, 0) \in cl(W)$.

Ahora, para ver que $[-\delta,\delta]\times\{\delta\}\subseteq cl(W)$, sea $z\in[-\delta,\delta]$ y $\varepsilon>0$. Entonces $V_\varepsilon=(z-\varepsilon,z+\varepsilon)\times(\delta-\varepsilon,\delta+\varepsilon))$ es un abierto de X que contiene a (z,δ). Sea $w\in(z-\varepsilon,z+\varepsilon)\cap(-\delta,\delta)$ y $\lambda=\frac{1}{2}\text{mín}\{\delta,\varepsilon\}$. Entonces $(w,\delta-\lambda)\in W\cap V_\varepsilon$. Esto demuestra que $(z,\delta)\in cl(W)$.

Solo hace falta ver que $[-\delta,\delta]\times(0,\delta)\subseteq cl(W)$. Sean $(x,y)\in[-\delta,\delta]\times(0,\delta)$ y $\varepsilon>0$. Entonces $V_\varepsilon=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ es un abierto que contiene a (x,y). Sean $w_1\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(-\delta,\delta)$ y $w_2=(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\cap(0,\delta)$, se tiene entonces que $(w_1,w_2)\in V_\varepsilon\cap W$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $cl(W)=[-\delta,\delta]\times[0,\delta]$.

Sea $r>0$ y $Q=[-r,r]\times[0,r]$. Probaremos que $int(Q)=(-r,r)\times[0,r)$.

Vamos a probar primero que $(-r,r)\times\{0\}\subseteq int(Q)$. Sea $x\in(-r,r)$ y $0<\varepsilon<\frac{r}{2}$. Notemos que $V_\varepsilon=\{(x,0)\}\cup((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(0,\varepsilon))$ es un abierto de X que contiene a $(x,0)\in Q$ y por construcción $V_\varepsilon\subseteq Q$. Lo que muestra que $(-r,r)\times\{0\}\subseteq int(Q)$.

Ahora probemos que $(-r,r)\times(0,r)\subseteq int(Q)$. Sean $(x,y)\in(-r,r)\times(0,r)$ y $0<\varepsilon<\frac{min\{y,r-y\}}{2}$. Tomemos $V_\varepsilon=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$. Es claro que V_ε es un abierto que contiene a (x,y) y por construcción se tiene que $V_\varepsilon\subseteq Q$. Lo que nos lleva a tener que $(-r,r)\times(0,r)\subseteq int(Q)$.

Por lo anterior, si U es un abierto regular que contiene a $(0,0)$, entonces existe $t>0$ tal que $(-t,t)\times[0,t)\subseteq U$.

Definimos $B=\{(0,0)\}\cup((-1,1)\times(0,1))$. Notemos que $B\in\tau$ y si D es un abierto regular de X que contiene a $(0,0)$, entonces $D-B\neq\emptyset$. Por lo tanto B no pertenece a la topología que tiene por base a los conjuntos abiertos regulares.

La Topología del medio disco tiene propiedades muy interesantes que se

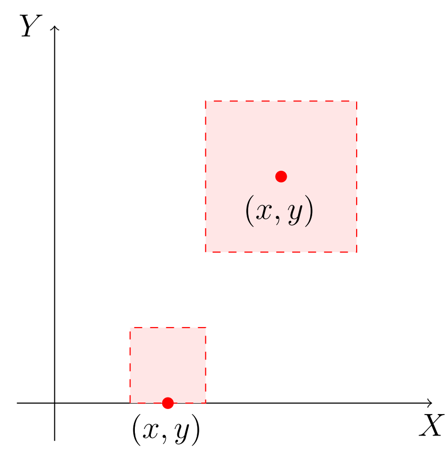


Figura 2.1: Básicos de la Topología del medio disco.

pueden consultar en [11].

Definición 2.4. La topología garantizada por el Teorema 2.2 es llamada **topología de semiregularización** de (X, τ) y se denotará por τ_s.

Definición 2.5. Un espacio topológico (X, τ) es **semirregular** si y sólo si los conjuntos abiertos regulares forman una base para la topología τ.

Un ejemplo fácil de un espacio semirregular es el siguiente.

Ejemplo 2.6. En el Ejemplo 1.14 vimos que $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b\}$ es base para τ_{sor} sobre $\mathbb{R}$, y en el Ejemplo 1.26 probamos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos regulares, por lo que $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es semiregular.

Teorema 2.7. *La familia de los subconjuntos clopen de un espacio topológico (X, τ) es base para una topología para X que es más gruesa que la topología de semiregularización τ_s para (X, τ).*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{A \subseteq X : A$ es clopen$\}$. Del hecho que $X \in \mathcal{B}$, se tiene que cada elemento de X pertence a algún elemento de $\mathcal{B}$. Ahora, sean

$A, B \in \mathcal{B}$ y $x \in A \cap B$. Dado que $A \cap B \in \mathcal{B}$, se tiene que $A \cap B$ contiene a un elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a x.

Ahora, sea $\mathcal{C} = \{U \subseteq X : U$ es abierto regular$\}$. Se tiene que $\mathcal{C}$ es base para τ_s. Del hecho que $\mathcal{B}$ está contenido en $\mathcal{C}$, se sigue que la topología generada por B es más gruesa que τ_s. $\square$

Los espacios semirregulares tienen cierta relación con los espacios regulares, pero para definir a los espacios regulares primero debemos saber qué es un espacio T_1, así que empecemos por conocer a los espacios T_1.

Definición 2.8. Un espacio topológico X es T_1 si para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X, tales que $x \in U - V$ y $y \in V - U$.

Veamos a continuación un ejemplo de un espacio T_1.

Ejemplo 2.9. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$, con la topología τ generada por $\{(a,b) \times (c,d) \subseteq [0,1] \times [0,1] : a < b$ y $c < d\}$. El espacio (X,τ) es T_1.
Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en X distintos. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_1 \neq x_2$, de esto $x_1 - x_2 \neq 0$. Sea $\epsilon = \frac{|x_1 - x_2|}{3}$. Consideremos $U = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times [0,1]$ y $V = (x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon) \times [0,1]$. Veamos que $(x_1, y_1) \in U - V$. Claramente $(x_1, y_1) \in U$. Ahora supongamos que $(x_1, y_1) \in V$. Entonces $|x_1, x_2| < \epsilon = \frac{|x_1 - x_2|}{3}$, es decir, $|x_1, x_2| < \frac{|x_1 - x_2|}{3}$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto, $(x_1, y_1) \notin V$. Análogamente, $(x_2, y_2) \in V - U$. Por lo tanto (X, τ) es T_1.

Definición 2.10. Un espacio topológico X es un **espacio regular o** T_3 si satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio T_1.

2. para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X - F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Ya vimos en el Ejemplo 2.9 que $[0,1] \times [0,1]$ es T_1, así que aprovecharemos este hecho para dar un ejemplo de un espacio regular.

Ejemplo 2.11. Para ver que $[0,1] \times [0,1]$ es T_3 basta con demostrar el segundo punto de la definición.
Sean $F \subseteq X$ cerrado y $\bar{x} = (x,y) \in X - F$. Dado que $X - F$ es abierto existe $\epsilon \in (0,1]$, tal que, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \times (y-\epsilon, y+\epsilon) \subseteq X - F$. Observemos que $(x-\frac{\epsilon}{3}, x+\frac{\epsilon}{3}) \times (y-\frac{\epsilon}{3}, y+\frac{\epsilon}{3}) \subseteq X - F$. Por otro lado, $[x-\frac{2\epsilon}{3}, x+\frac{2\epsilon}{3}] \times [y-\frac{2\epsilon}{3}, y+\frac{2\epsilon}{3}]$ es un conjunto cerrado contenido en $X - F$. Así, $X - [x-\frac{2\epsilon}{3}, x+\frac{2\epsilon}{3}] \times [y-\frac{2\epsilon}{3}, y+\frac{2\epsilon}{3}]$ es un conjunto abierto que contiene a F y es tal que $\big(X - [x-\frac{2\epsilon}{3}, x+\frac{2\epsilon}{3}] \times [y-\frac{2\epsilon}{3}, y+\frac{2\epsilon}{3}]\big) \cap (x-\frac{\epsilon}{3}, x+\frac{\epsilon}{3}) \times (y-\frac{\epsilon}{3}, y+\frac{\epsilon}{3}) = \emptyset$.
Por lo tanto (X, τ) es un espacio T_3.

Sólo por el nombre de las definiciones de espacio regular y espacio semirregular podríamos pensar que hay una relación entre ambos espacios, y efectivamente. Veamos la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *Cualquier espacio regular es semiregular.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio regular, $A \in \tau$ y $x \in A$. Como (X, τ) es un espacio regular, existen abiertos U y V ajenos, tales que, $x \in U$ y $X - A \subseteq V$. Por Proposición 1.31 se tiene que $int(cl(U))$ es un abierto regular y $U \subseteq int(cl(U))$. De aquí $x \in int(cl(U))$.

Notemos que como $U \subseteq X-V$ y $X-V$ es cerrado, entonces $cl(U) \subseteq X-V$. Dado que $X-V \subseteq A$, se sigue que $cl(U) \subseteq A$. Así, $int(cl(U)) \subseteq int(A) \subseteq A$. Hemos demostrado que $x \in int(cl(U)) \subseteq A$. Por lo que (X, τ) un espacio semiregular. □

El regreso de la Proposición 2.12 no necesariamente es cierto, es decir, no todo espacio semiregular es regular. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.13. Supongamos que $(0^*, 0^*) \notin \mathbb{R}^2$. Sea $X = \mathbb{R}^2 \cup \{(0^*, 0^*)\}$. Sea A un subconjunto de X y sea $(x, y) \in A$. Diremos que (x, y) es un punto interior de A si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $(0, 0) \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq A$, o bien $(x, y) = (0, 0)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, \varepsilon) \subseteq A$, o bien $(x, y) = (0^*, 0^*)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0) \subseteq A$. Diremos que $A \in \tau$ si cada uno de sus puntos es un punto interior de A. La topología τ es conocida como **la topología de doble origen**.

Notemos que la topología del subespacio abierto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ del espacio (X, τ) coincide con la topología usual. Así, si $(p, q) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, entonces $\{(p, q)\}$ es un subconjunto cerrado de X; y para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y para cada subconjunto abierto W de X, existe un subconjunto abierto V de X contenido en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tal que $(x, y) \in V \subseteq cl(V) \subseteq W - \{(0, 0)\} \subseteq W$.

Para probar que (X, τ) es T_1, basta mostrar que $\{(0, 0)\}$ y $\{(0^*, 0^*)\}$ son subconjuntos cerrados de X.

Primero demostremos que $\{(0, 0)\}$ es cerrado. Basta demostrar que $X - \{(0, 0)\}$ es abierto, es decir, tenemos que demostrar que cada punto $(x, y) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \cup \{(0^*, 0^*)\}$ es interior.

Supongamos que $(x, y) = (0^*, 0^*)$. Como $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es un abierto con la topología usual, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0) \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, esto indica que $(0^*, 0^*)$ es un punto interior de X.

Además, cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es punto interior ya que aquí la topología del doble origen coincide con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $\{(0,0)\}$ es cerrado.

Ahora mostraremos que $\{(0^*, 0^*)\}$ es cerrado, probando que $\mathbb{R}^2$ es abierto en X. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es claro que (x, y) es punto interior ya que aquí tenemos a la topología usual. Solo falta mostrar que $(0, 0)$ es punto interior, pero esto es fácil ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$, lo cual por la definición de conjunto abierto con la topología del doble origen, se tiene que $(0, 0)$ es punto interior. Por lo tanto, $\{(0^*, 0^*)\}$ es un conjunto cerrado.

Sea $\delta > 0$. Definimos $W_\delta = \{(0,0)\} \cup ((-\delta, \delta) \times (0, \delta))$ Mostraremos que $cl(W_\delta) = [-\delta, \delta] \times [0, \delta]$.

Primero probaremos que $[-\delta, \delta] \times \{0\} \subseteq cl(W_\delta)$. Sea $(x, 0) \in ([-\delta, 0) \cup (0, \delta]) \times \{0\}$. Sea $\beta > 0$, entonces $V_\beta = (x - \beta, x + \beta) \times (-\beta, \beta)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $(x, 0) \in V_\beta$ y como en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ la topología de X coincide con la topología usual, entonces $V_\beta \cap W_\delta \neq \emptyset$. Por lo tanto $(x, 0) \in cl(W_\delta)$. Además, como $(0, 0) \in W_\delta$, se sigue que $(0, 0) \in cl(W_\delta)$. Por lo que $[-\delta, \delta] \times \{0\} \subseteq cl(W_\delta)$.

Ahora mostraremos que $[-\delta, \delta] \times \{\delta\} \subseteq cl(W_\delta)$. Sea $(x, \delta) \in [-\delta, \delta] \times \{\delta\}$. Tomemos $\beta > 0$ y $V_\beta = (x - \beta, x + \beta) \times (\delta - \beta, \delta + \beta)$ un abierto de X. Notemos que $(x, \delta) \in V_\beta$. Dado que $(x, \delta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, V_β es un abierto con la topología usual, por lo que $V_\beta \cap W_\delta \neq \emptyset$. Mostrando que $(x, \delta) \in cl(W_\delta)$.

Solo falta probar que $\{-\delta\}\times[0,\delta]\subseteq cl(W_\delta)$ y $\{\delta\}\times[0,\delta]\subseteq cl(W_\delta)$, lo cual se prueba de manera análoga a cuando demostramos que $[-\delta,\delta]\times\{0\}\subseteq cl(W_\delta)$ y $[-\delta,\delta]\times\{\delta\}\subseteq cl(W_\delta)$. Por lo que concluimos que $cl(W_\delta)=[-\delta,\delta]\times[0,\delta]$.

Sea $\lambda>0$. Definimos $C_\lambda=[-\lambda,\lambda]\times[0,\lambda]$. Probaremos que $int(C_\lambda)=\{(0,0)\}\cup(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)$.

Sea $(x,y)\in(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)\cup\{(0,0)\}$. Por demostrar que $(x,y)\in int(C_\lambda)$. Si $(x,y)\in(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)$, entonces $(x,y)\neq(0,0)$ por lo que (x,y) es un punto interior de C_λ con la topología usual y por lo tanto también con la topología del doble origen. Ahora, si $(x,y)=(0,0)$, entonces $V_\lambda=(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)$ es un abierto de X tal que $V_\lambda\subseteq C_\lambda$. Así $(0,0)\in int(C_\lambda)$. Luego, $\{(0,0)\}\cup(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)\subseteq int(C_\lambda)$.

Ahora demostremos la otra contención. Sea $(x,y)\in int(C_\lambda)$, entonces $(x,y)\neq(0,0)$ ya que ningún abierto de la forma $(-\gamma,\gamma)\times(-\gamma,0)$ se queda contenido en C_λ. Por otro lado, sea $\varepsilon>0$ y V_ε un abierto de (x,y) tal que $V_\varepsilon\subseteq C_\lambda$. Si $V_\lambda=(-\varepsilon,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)$, entonces $(x,y)=(0,0)$. Supongamos que $V_\varepsilon=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$, entonces $-\lambda\leq x-\varepsilon<x<x+\varepsilon\leq\lambda$ y $0\leq y-\varepsilon<y<y+\varepsilon\leq\lambda$. Lo cual implica que $-\lambda<x<\lambda$ y $0<y<\lambda$, es decir, $(x,y)\in(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)$. Concluimos que $int(C_\lambda)=\{(0,0)\}\cup(-\lambda,\lambda)\times(0,\lambda)$.

De lo anterior, para cada $\varepsilon>0$, el abierto $\{(0,0)\}\cup(-\varepsilon,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)$ de X es abierto regular. Similarmente, para cada $\varepsilon>0$, el abierto $\{(0^*,0^*)\}\cup(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,0)$ de X es abierto regular. Por lo tanto, X es semiregular.

Para demostrar que X no es regular, sea $F=cl(\{(0,0)\}\cup(-1,1)\times(0,1))$. Tenemos que F es un subconjunto cerrado de X tal que $(0^*,0^*)\notin F$. Sea U un abierto básico de X tal que $(0^*,0^*)\in U$, entonces existe $\varepsilon>0$ tal que $U=(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,0)$. Si V es un abierto básico de X tal que $F\subseteq V$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $[-1,1] \times [0,1] \subseteq (-1-\lambda, 1+\lambda) \times (-\lambda, 1+\lambda)$. Notemos que $[(-1-\lambda, 1+\lambda) \times (-\lambda, 1+\lambda)] \cap [(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0)] \neq \emptyset$, lo que nos lleva a que X no es regular.

Ahora veamos otro ejemplo de un espacio que es semiregular pero no regular.

Ejemplo 2.14. Sea $X = \{0,1\}$ con la topología indiscreta. Veamos que X es semiregular, pero no regular.
Dado que $\emptyset$ y X siempre (en cualquier espacio topológico) son abiertos regulares y en este caso $\tau = \{\emptyset, X\}$, entonces claramente X tiene una base para su topología compuesta por abiertos regulares, es decir, X es semiregular.

Veamos que (X, τ) no es T_1. Supongamos que si lo es, es decir para dos elementos de X, en este caso 0 y 1 existen U y V tal que $0 \in U - V$ y $1 \in V - U$. Esto es una contradicción puesto que el único abierto donde pueden estar ambos puntos es X. Por lo tanto (X, τ) no es regular.

2.2. Quasi-topología

Definición 2.15. La topología garantizada por el Teorema 2.7 es llamada **quasi-topología** para (X, τ) y se denotará por τ_q.

Para entender un poco más de la quasi-topología veamos una definición y un teorema que nos relaciona a la quasi-topología con espacios conocidos.

Definición 2.16. Un espacio (X, τ) es **0-dimensional** o de **dimensión cero** si $\mathcal{B} = \{B \subseteq X : B \text{ es un clopen}\}$ es una base para τ.

Dos ejemplos de espacios de dimensión cero son: (X,τ) con τ la topología de Sierpinsky y (X,τ_{dis}) con X el conjunto de Cantor.

La relación entre los espacios de dimensión cero y la quasi-topología está en el siguiente teorema.

Teorema 2.17. *Un espacio topológico (X,τ) es de dimensión cero si y sólo si $\tau_q=\tau$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que (X,τ) es de dimensión cero. Sabemos que $\tau_q\subseteq\tau_s$ y $\tau_s\subseteq\tau$ por lo que $\tau_q\subseteq\tau$. Ahora del hecho de que (X,τ) es de dimensión cero, existe una base $\mathcal{B}$, de conjuntos clopen para τ. Por lo que la colección de conjuntos clopen es una base para τ. Por lo tanto $\tau\subseteq\tau_q$.
$\Leftarrow$] Por otro lado supongamos que $\tau_q=\tau$. Sabemos que τ_q tiene como base a la familia de todos los clopen de (X,τ) entonces (X,τ_q) es de dimensión cero. Además, $\tau_q=\tau$ por lo que (X,τ) es de dimensión cero. $\square$

El siguiente teorema relaciona varios de los conceptos que hemos trabajado hasta ahora, además que nos dice bajo qué condiciones los cerrados regulares y abiertos regulares resultan ser conjuntos clopen.

Teorema 2.18. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *(X,τ) es extremadamente disconexo.*

2. *Todo abierto regular de (X,τ) es clopen.*

3. *Todo cerrado regular de (X,τ) es clopen.*

4. *$\tau_q=\tau_s$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que (X,τ) es extremadamente disconexo. Sea $A \in \tau$ un abierto regular, veamos que A es cerrado. Como $cl(A) \in \tau$, entonces $int(cl(A)) = cl(A)$, pero $A = int(cl(A))$ así $A = cl(A)$, por lo que A es clopen.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que todo abierto regular es clopen y sea $V \in \tau$. Hay que demostrar que $cl(V) \in \tau$. Sea $W = int(cl(V))$. Sabemos que W es abierto regular de X y por lo tanto clopen. Como $V \subseteq int(cl(V)) \subseteq cl(V)$, entonces $cl(V) \subseteq cl(in(cl(V))) \subseteq cl(cl(V)) = cl(V)$. Dado que $int(cl(V))$ es clopen, $cl(int(cl(V))) = int(cl(V))$, con esto $cl(V) \subseteq int(cl(V)) \subseteq cl(V)$. Por lo tanto $cl(V) = int(cl(V))$ y con finalmente podemos concluir que (X,τ) es extremadamente disconexo.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que todo abierto regular de (X,τ) es clopen. Sea $F \subseteq X$ cerrado regular. De esto, $X - F$ es abierto regular, por lo que $X - F$ es clopen, entonces, $X - F = cl(X - F)$, así $X - F = X - int(F)$. Por lo tanto $F = int(F)$, es decir, F es clopen.

3) $\Rightarrow$ 2) Ahora supongamos que todo cerrado regular de (X,τ) es clopen. Demostraremos que todo abierto regular es clopen, Sea $A \subseteq X$ abierto regular. De aquí que, $X - A$ es cerrado regular. Por hipótesis, $X - A$ es clopen, entonces, $X - A = int(X - A)$. Luego, $X - A = X - cl(A)$. Por lo tanto $A = cl(A)$, es decir, A es clopen.

2) $\Rightarrow$ 4) Veamos que $\tau_s \subseteq \tau_q$. Basta demostrar que $\{A \subseteq X : A \text{ es clopen}\}$ es una base para τ_s. Sea $B \in \tau_s$ y $b \in B$. Entonces existe un abierto regular U de (X,τ) tal que $b \in U \subseteq B$. Por hipótesis se tiene que U es clopen. Luego

se tiene que $B \in \tau_q$.

4) $\Rightarrow$ 2) Sea A un abierto regular de X. Por demostrar que A es clopen, o bien, A es cerrado. $\square$

Y para finalizar esta sección tenemos un resultado inmediato del Teorema 2.18.

Corolario 2.19. *Si* (X, τ) *es semirregular y de dimensión cero, entonces* (X, τ) *es extremadamente disconexo.*

Demostración. Dado que (X, τ) es semiregular, se tiene que $\tau = \tau_s$ y como (X, τ) es de dimensión cero, entonces $\tau = \tau_q$ por lo que $\tau_s = \tau_q$. Así (X, τ) es extremadamente disconexo. $\square$

2.3. Topología δ-cociente

En las secciones anteriores vimos un poco de la topología de semirregularización, de la quasi-topología y de cómo se relacionan, en esta sección vamos a conocer la topología $\delta-$cociente.

Definición 2.20. Decimos que G es un conjunto **δ-abierto** de un espacio X, si para cada $x \in G$, existe un abierto regular H de X tal que $x \in H \subseteq G$. Se dice que el conjunto M es **δ-cerrado** de X si es el complemento de un conjunto δ-abierto de X. En otras palabras, G es un δ-abierto de X si y sólo si $G \in \tau_s$.

No es díficil ver que todo conjunto abierto regular es δ-abierto y todo cerrado regular es $\delta-$cerrado.

Observación 2.21. Veamos que no todo $\delta-$abierto es un abierto regular. Por ejemplo, claramente $U = (0,1) \cup (1,2)$ es un $\delta-$abierto, pero no es un abierto regular. De la misma manera no todo $\delta-$cerrado es un cerrado regular.

Ya vimos que la intersección de un abierto con un abierto regular no siempre resulta ser un abierto regular, la siguiente observación es análoga pero con abiertos regulares y $\delta-$abiertos.

Observación 2.22. Sabemos que $V = (0,1) \cup (1,3)$ es un $\delta-$abierto y $W = (0,2)$ es un abierto regular. Sin embargo, $V \cap W = (0,1) \cup (1,2)$ no es un abierto regular. Por lo que podemos decir que, en general: Si V es un $\delta-$abierto en un espacio (X, τ) y W es un abierto regular de (X, τ), entonces $V \cap W$ no necesariamente es un abierto regular.

Definición 2.23. Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow F$ una función. La topología en F para la cual un subconjunto $A \subseteq F$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(A)$ es δ-abierto en X es llamada la **topología δ-cociente**.

Notemos que la topología δ-cociente siempre depende de f.

Proposición 2.24. *Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow F$ una función. Un subconjunto $B \subseteq F$ es cerrado en la topología δ-cociente si y sólo si $f^{-1}(B)$ es δ-cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que $B \subseteq F$, B es cerrado en la topología δ-cociente por lo que $F - B$ es abierto en la topología δ-cociente, entonces $f^{-1}(F - B)$ es δ-abierto en X, es decir, $X - f^{-1}(B)$ es δ-abierto en X, por lo que $f^{-1}(B)$ es δ-cerrado en X. $\square$

Mostramos algunos ejemplos de topologías δ-cocientes.

Sea $X = [-1, 1]$. Dotamos a X con la sigiente topología
$\tau_X = \{A \subseteq [-1, 1] : 0 \notin A \text{ o } (-1, 1) \subseteq A\}$.
Para los siguientes ejemplos ocuparemos este espacio topológico por lo que considero importante analizar los abiertos regulares.

Lema 2.25. *Si* $U \in \tau_X - \{\{-1, 1\}, \{1\}, \{-1\}\}$, *entonces* $0 \in cl(U)$

Demostración. Sea $U \in \tau_X - \{\{-1, 1\}, \{1\}, \{-1\}\}$ y $V \in \tau_X$, tal que $0 \in V$, es claro que si $0 \in U$, entonces $0 \in cl(U)$. Supongamos que $0 \notin U$. Dado que $U \notin \{\{-1, 1\}, \{1\}, \{-1\}\}$, existe $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ tal que $x \in U$. Del hecho que $(-1, 1) \subseteq V$, se sigue que $V \cap U \neq \emptyset$. Por lo que $0 \in cl(U)$ □

Lema 2.26. *Si* $U \in \tau_X - \{\{-1, 1\}, \{1\}, \{-1\}\}$, *entonces* $cl(U) = U \cup \{0\}$

Demostración. Del Lema 2.25 se sigue que $U \cup \{0\} \subseteq cl(U)$. Sea $x \in cl(U) - \{0\}$. Del hecho que $\{x\} \in \tau_X$, se tiene que $x \in U$. □

Observación 2.27. Notemos que $cl(\{-1, 1\}) = \{-1, 1\}$, $cl(\{-1\}) = \{-1\}$ y $cl(\{1\}) = \{1\}$.

Lema 2.28. *Si* $U \in \tau_{[-1,1]} - \{(-1, 0) \cup (0, 1), [-1, 0) \cup (0, 1), (-1, 0) \cup (0, 1], [-1, 0) \cup (0, 1]\}$ *entonces* $int(cl(U))$.

Demostración. Sea $U \in \tau_{[-1,1]} - \{(-1, 0) \cup (0, 1), [-1, 0) \cup (0, 1), (-1, 0) \cup (0, 1], [-1, 0) \cup (0, 1]\}$. Del Lema 2.26 se sigue que $(-1, 1) \nsubseteq cl(U)$. Así $0 \notin U$. Dado que U es abierto y $U \subseteq cl(U)$, se concluye que $int(cl(U)) = U$. □

Corolario 2.29. *Todo elemento* U *de* $\tau_{[-1,1]} - \{(-1, 0) \cup (0, 1), [-1, 0) \cup (0, 1), (-1, 0) \cup (0, 1], [-1, 0) \cup (0, 1]\}$ *es un abierto regular en* $([-1, 1], \tau_{[-1,1]})$.

Ejemplo 2.30. Sea $f : ([-1,1], \tau_{[-1,1]}) \longrightarrow [0,1]$ definida como $f(x) = |x|$ con $\tau = \{A \subseteq [-1,1] : 0 \notin A \text{ o } (-1,1) \subseteq A\}$.

La topología δ-cociente queda de la siguiente forma:

$\tau_{\delta c} = \{B \subseteq [0,1] : B \subseteq [0,1) \text{ o } B \subseteq (0,1]\}$

Para probar que todo subconjunto de $(0,1]$ es abierto, es suficiente demostrar que $\{x\}$ es abierto para todo $x \in (0,1]$. Sea $x \in (0,1]$. Notemos que $f^{-1}(\{x\}) = \{-x, x\}$, del Corolario 2.29 se tiene que $f^{-1}(\{x\})$ es un abierto regular. Lo siguiente es ver cuándo un subconjunto de $[0,1]$ que contiene a 0 es abierto. Notemos que como consecuencia del Corolario 2.29, se tiene que los abiertos regulares que contienen al cero son $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$ y $[-1,1]$, de estos, solo $(-1,1)$ y $[-1,1]$ son preimagen de $[-1,1)$ y $[-1,1]$ respectivamente. Por lo tanto, un subconjunto de $[-1,1]$ que contiene a cero es abierto si y sólo si contiene a $[-1,1)$.

Ejemplo 2.31. Sea $g : ([-1,1], \tau) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ \\ \left\lceil \dfrac{1}{x} \right\rceil & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

con $\tau = \{A \subseteq [-1,1] : 0 \subseteq A \text{ o } (-1,1) \in A\}$.

La topología δ-cociente queda de la siguiente forma:

$\tau_{\delta c} = \{B \subseteq \mathbb{Z} : B \subseteq \mathbb{Z} - \{0\} \text{ o } \mathbb{Z} - \{1\} \subseteq B\}$.

Para probar que todo subconjunto de $\mathbb{Z} - \{0\}$ es abierto es suficiente demostrar que $\{n\}$ es abierto para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Sea $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Observemos que para $n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, se tiene que $g^{-1}(\{n\}) = [\frac{1}{n}, \frac{1}{1-n}]$ y para $n = 1$, $g^{-1}(\{1\}) = 1$. Utilizando el Corolario 2.29 se demuestra que $g^{-1}(\{n\})$ es un abierto regular. Esto demuestra que $\{n\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{Z}$ con la topología δ-cociente.

Finalmente veamos cuando un subconjunto de $\mathbb{Z}$ que contiene a 0 es abierto. Notemos que $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Como consecuencia del Corolario 2.29 se tiene que el conjunto más pequeño que contiene a 0 y que su imagen contienen a $(-1, 1)$ es $\mathbb{Z} - \{1\}$. Por lo tanto, si $B \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $0 \in B$, B es abierto en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $\mathbb{Z} - \{1\} \subseteq B$.

Capítulo 3

Funciones continuas y super continuas

A medida que la topología moderna se desarrollaba, los matemáticos generalizaron la noción de continuidad para aplicarse a funciones entre espacios topológicos generales, no solo a funciones definidas en espacios métricos. Esta generalización permitió un estudio más amplio de la continuidad en contextos topológicos diversos y más abstractos.

3.1. Funciones continuas

Definición 3.1. Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función. Diremos que f es **continua en el punto** $x_0 \in X$, si para cualquier subconjunto abierto A de Y tal que $f(x_0) \in A$, existe un subconjunto abierto B de X tal que $x \in B$ y $f(B) \subseteq A$. Si f es continua en todos sus puntos en X, diremos simplemente que f es **continua**.

En el siguiente teorema se muestran algunas equivalencias a la definición de continuidad que hemos presentado anteriormente. La demostración se puede consultar en [5, Teorema 18.8, pág 118].

Teorema 3.2. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *f es continua,*

2. *Para cada subconjunto A de X se tiene que $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$,*

3. *Para cada subconjunto abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X,*

4. *para cada cerrado W de Y, $f^{-1}(W)$ es cerrado en X.*

3.2. Funciones super continuas

En esta sección presentamos definiciones, ejemplos y resultados interesantes de ciertos tipos de continuidad, las super continuidades. Pero, ¿por qué se llaman *super continuidades*?, ¿serán más *super* que la continuidad?, ¿qué las hace ser *super*?. Las respuestas las iremos conociendo a través de esta sección.

Definición 3.3. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **super continua**, si para cada $x \in X$ y para cada abierto V de Y que contiene a $f(x)$, existe un abierto regular U de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

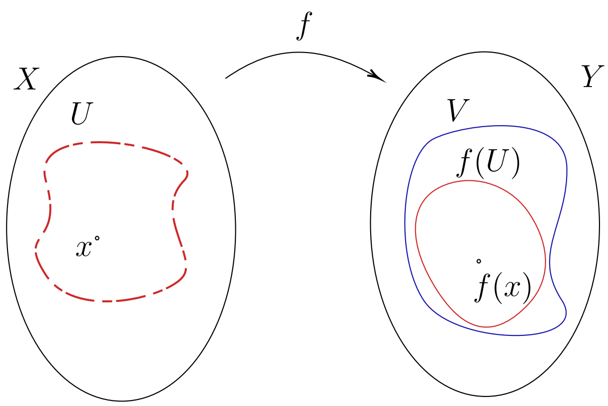


Figura 3.1: Función Super continua

Ahora presentamos un ejemplo de una función que es super continua y después una que no es super continua.

Ejemplo 3.4. Sea $f : (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ definida como $f(x) = x$ y sea $V \in \tau_u$ tal que $f(x) \in V$. Entonces $x \in V$ y existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq V$. Definimos $U = [x, x+\epsilon)$. En el Ejemplo 1.26 vimos que U es un abierto regular. Además, $x \in U$ y $f(U) = U \subseteq V$, con esto f es super continua.

Ejemplo 3.5. Sean $X = \{a, b\}$ y $Y = \{1, 2\}$ con $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ y $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{2\}\}$. Definimos $g : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ tal que $g(a) = 2$ y $g(b) = 1$.

Supongamos que g es super continua en a. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $g(a) \in V$, es decir, $2 \in V$. Si $V = \{2\}$. Así existe W abierto regular de X tal que $a \in W$ y $g(W) \subseteq \{2\}$, entonces $W = \{a\}$, pero $int(cl(\{a\})) = int(cl(X)) = X$, es decir, $\{a\}$ no es un abierto regular. Lo cual es una contradicción, por lo que g no es super continua.

Con el Ejemplo 3.5 nos damos cuenta que:

Observación 3.6. No todo homeomorfismo es una función super continua.

Teorema 3.7. *Si* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *una función super continua y* $A \in \tau_X$*, entonces* $f|_A : (A, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *es super continua.*

Demostración. Sean $x \in A$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Como $x \in A \subseteq X$ y f es super continua, entonces existe un abierto regular U de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Sea $W = U \cap A$. Entonces $int(cl(W)) = int(cl(U \cap A)) \subseteq int(cl(U) \cap cl(A)) = int(cl(U)) \cap int(cl(A)) \subseteq int(cl(U)) = U$. Así $int(cl(W)) \subseteq U$, por lo que $f(int(cl(W))) \subseteq f(U) \subseteq V$. Como $int(cl(W))$ es un abierto regular, entonces $f|_A : (A, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es super continua. $\square$

La siguiente proposición da respuesta a una de las preguntas que nos hicimos al inicio de esta sección.

Proposición 3.8. *Sea* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *una función super continua, entonces* f *es continua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Tenemos que f es super continua, entonces existe un abierto regular U en X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Como U es también un abierto, entonces f es continua. $\square$

Con el siguiente ejemplo vemos que el regreso de la Proposición 3.8 no es cierto, aún cuando la función es un homeomorfismo.

Ejemplo 3.9. Sea X el espacio $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ dotado con la topología del medio disco. La definición de esta topología se hizo en el Ejemplo 2.3. Probaremos que la función identidad de X en X no es super continua.

Sean $x = (0, 0)$ y V un subconjunto abierto básico de X que contiene a $f(x) = x$. Por la definición de la topología del medio disco se tiene que

$V = [(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, \varepsilon)] \cup \{(0,0)\}$. En el Ejemplo 2.3 vimos que si U es un abierto regular que contiene a $(0,0)$, entonces existe $t > 0$ tal que $(-t,t) \times [0,t) \subseteq U$, pero esto implica que

$$(-t,t) \times [0,t) \subseteq U \subseteq [(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, \varepsilon)] \cup \{(0,0)\}.$$

Lo cual es una contradicción. Lo que nos lleva a concluir que la función no es una función super continua.

El siguiente resultado nos proporciona una relación entre las funciones super continuas, los abiertos y los $\delta-$abiertos.

Teorema 3.10. *Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a. f es super continua.

b. $f^{-1}(U)$ es un δ-abierto en X para todo $U \in \tau_Y$.

c. $f^{-1}(B)$ es un δ-cerrado en X para todo cerrado B en Y.

d. Para cada punto $x \in X$ y cada $M \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in M$, existe un subconjunto δ-abierto N de X tal que $x \in N$ y $f(N) \subseteq M$.

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Sean $W \in \tau_Y$ y $w \in f^{-1}(W)$. Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in W$, existe un abierto regular $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq W$. Entonces existe un abierto regular $Z \in \tau_X$ tal que $w \in Z$ y $f(Z) \subseteq W$. Con esto, $Z \subseteq f^{-1}(W)$. Por lo tanto $f^{-1}(W)$ es un subconjunto δ-abierto de X.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sea B un subconjunto cerrado de Y. Luego $Y - B$ es un abierto de Y. Entonces $f^{-1}(Y - B)$ es un δ-abierto. Dado que $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$, se sigue que $f^{-1}(B)$ es δ-cerrado.

c) $\Rightarrow$ *d*) Sean $x \in X$ y $M \in \tau_Y$ tales que $f(x) \in M$. Notemos que $Y - M$ es un cerrado de Y. Entonces $f^{-1}(Y - M)$ es un δ-cerrado de X. De aquí que $f^{-1}(M) = X - f^{-1}(Y - M)$ es un δ-abierto de X que satisface que $x \in f^{-1}(M)$ y $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$.

d) $\Rightarrow$ *a*) Sean $x \in X$, $V \in \tau_Y$ tales que $f(x) \in V$. Mostraremos que existe un abierto regular U en X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Sabemos que existe N un subconjunto δ-abierto de X tal que $x \in U$ y $f(N) \subseteq V$. Por ser N δ-abierto, existe un abierto regular U de X tal que $x \in U$ y $U \subseteq N$, entonces $f(U) \subseteq f(N) \subseteq V$. $\square$

El siguiente teorema nos indica bajo qué condiciones el regreso de la Proposición 3.8 se garantiza.

Teorema 3.11. *Sean X espacio semiregular y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Entonces f es super continua.*

Demostración. Sean $V \in \tau_Y$ y $x \in f^{-1}(V)$. Como f es continua, se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Luego existe W abierto regular de X tal que $x \in W$ tal que $W \subseteq f^{-1}(V)$. De aquí que $f^{-1}(V)$ es un δ-abierto y por el inciso b. del Teorema 3.10, f es super continua. $\square$

Por la Proposición 2.12 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.12. *Sean X un espacio T_3 y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Entonces f es una función super continua.*

Demostración. Tenemos que X es T_3 entonces X es semiregular y usando el Teorema 3.11 queda demostrado. $\square$

Teorema 3.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $\mathcal{B}$ una base para Y. La función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es super continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es δ-abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base para Y, $B \in \mathcal{B}$ y $y \in B$. Como f es super continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es δ-abierto en X para todo $U \in \tau_Y$. Además, $\mathcal{B}$ es una base para Y, por lo que $B \in \tau_Y$. Así $f^{-1}(B)$ es δ-abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Ahora supongamos que $f^{-1}(B)$ es δ-abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$. Sean $U \in \tau_Y$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $U = \bigcup_{B_i \in \mathcal{A}} B_i$. Luego

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{B_i \in \mathcal{A}} B_i\right) = \bigcup_{B_i \in \mathcal{A}} f^{-1}(B_i).$$

Por hipótesis $\bigcup_{B_i \in \mathcal{A}} f^{-1}(B_i)$ es δ-abierto. Por lo que $f^{-1}(U)$ es δ-abierto en X para todo $U \in \tau_Y$. Por lo anterior podemos decir que f es super continua $\square$

El siguiente resultado nos indica cual es la relación entre la topología $\delta-$cociente, la continuidad y la super continuidad.

Teorema 3.14. *Si $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función donde τ_Y es una topología δ-cociente, entonces f es super continua. Más aún, τ_Y es la topología más fina tal que $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es super continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Como τ_Y es una topología δ-cociente y $V \in \tau_Y$, entonces $f^{-1}(V)$ es un δ-abierto en X. Además $x \in f^{-1}(V)$, entonces existe un abierto regular H tal que $x \in H \subseteq f^{-1}(V)$, por lo que $x \in H$ y $f(H) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ y con esto tenemos que f es super continua.

Ahora para demostrar que τ_Y es la topología más fina para la cual f es super continua, suponemos que existe τ tal que $\tau_Y \subseteq \tau$ y f es super continua. Sean $V \in \tau$ y $x \in X$ tal que $f(x) \in V$. Como f es super continua, existe U abierto regular de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Notemos que U es δ-abierto, por definición de topología δ-cociente, τ es una topología δ-cociente. $\square$

Teorema 3.15. *Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función con τ_Y una topología δ-cociente. La función $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua si y sólo si $f \circ g$ es super continua.*

Demostración. Supongamos que g es continua. Sean $x \in X$ y $W \in \tau_Z$ tal que $f(g(x)) \in W$. Como g es continua, se tiene que $g^{-1}(W) \in \tau_Y$. Dado que $g^{-1}(W) \subseteq Y$ y τ_Y es una topología δ-cociente, entonces $f^{-1}(g^{-1}(W))$ es δ-abierto, es decir, para todo $x \in f^{-1}(g^{-1}(W))$, existe un abierto regular U tal que $x \in U \subseteq f^{-1}(g^{-1}(W))$. Entonces $g(f(x)) \in g(f(U)) \subseteq W$ y con esto tenemos que $g \circ f$ es super continua. Ahora tomamos $W \in \tau_Z$. Dado de $g \circ f$ es super continua tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ es un δ-abierto. También sabemos que τ_Y es una topología δ-cociente y con esto obtenemos que $g^{-1}(W) \in \tau_Y$ y por lo tanto g es continua. $\square$

A continuación presentamos un resultado diferente a todos los anteriores, ya que la función en el siguiente teorema es una función con rango un producto cartesiano.

Teorema 3.16. *Sean $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función y $g : (X, \tau_X) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{X \times Y})$ dada por $g(x) = (x, f(x))$. Entonces g es super continua si y sólo si f es super continua y X un espacio semi-regular.*

Demostración. $\Rightarrow$] Vamos a demostrar que f es super continua. Sean $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Dado que g es super continua, $X \times V \in \tau_{X\times Y}$ y $g(x) \in X \times V$, existe un abierto regular W de X tal que $x \in W$ y $g(W) \subseteq X \times V$. Notemos que $g(W) = \{(w, z) \in X \times Y : w \in W \text{ y } z = f(w)\} \subseteq X \times V$. De esto tenemos que $f(W) \subseteq V$. Por lo que f es super continua.

Ahora veamos que X es semiregular. Sean $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tales que $x \in U$. Como $U \times Y \in \tau_{X\times Y}$ y $g(x) \in U \times Y$, entonces existe $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$ y $g(W) \subseteq X \times Y$. Además $g(W) = \{(w, f(w)) \in X \times Y : w \in W\} \subseteq U \times Y$, esto implica $W \subseteq U$ y con esto X es semiregular.

$\Leftarrow$] Sean $x \in X$ y $V \in \tau_{X\times Y}$ tales que $g(x) \in V$. Entonces existen $A \in \tau_X$ y $B \in \tau_Y$ tal que $g(x) = (x, f(x)) \in A \times B \subseteq V$. Dado que X es semiregular, existe un abierto regular W de X tal que $x \in W \subseteq A$. Como f es super continua y $f(x) \in B$, existe Z abierto regular en X tal que $x \in Z$ y $f(Z) \subseteq B$. Definimos $H = W \cap Z$. Notemos que $H \subseteq W \subseteq A$. Del hecho que $H \subseteq Z$, se sigue que $f(H) \subseteq f(Z) \subseteq B$ y $H \times f(H) \subseteq A \times B$, es decir, $g(H) \subseteq X \times f(H) \subseteq A \times B \subseteq V$. Por lo tanto g es super continua. $\square$

3.2.1. δ-adherentes

Hemos presentamos algunas implicaciones de la continuidad de funciones haciendo uso de la cerradura de conjuntos. Ahora haremos algo parecido, pero en este caso hablaremos de la $\delta-$cerradura de un conjunto y en el Teorema 3.24 veremos cómo entra en juego la $\delta-$cerradura con las funciones super continuas.

Definición 3.17. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es **δ-adherente** de A si para cada vecindad abierta U de x se tiene que $int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 3.18. El conjunto $(A)_\delta$ de todos los puntos δ-adherentes del conjunto A es llamado la **δ-cerradura** del conjunto A.

Ejemplo 3.19. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset, X\}$. Si $A = \{a, b\}$, entonces $cl(A) = X$ y $(A)_\delta = X$. Si $A = \{c\}$, entonces $cl(A) = \{c\}$ y $(A)_\delta = \{c\}$. Si $A = \{b\}$, entonces $cl(A) = \{a, b\}$ y $(A)_\delta = \{a, b\}$.

Proposición 3.20. *Sean X un espacio, $P \subseteq X$ y $x \in P$. Entonces x es δ-adherente de P si y sólo si el interior de toda vecindad cerrada de x intersecta a P.*

Demostración. Sea W una vecindad cerrada de x. Veamos que $int(W) \cap P \neq \emptyset$. Demostremos que $int(cl(int(W))) = int(W)$. Sabemos que $int(W) \subseteq W$, entonces $cl(int(W)) \subseteq cl(W) = W$ así $int(cl(int(W))) \subseteq int(W)$. Además $int(W) \subseteq cl(int(W))$, entonces $int(W) \subseteq int(cl(int(W)))$. Por lo que $int(cl(int(W))) = int(W)$, es decir, $int(W) \cap P \neq \emptyset$
Ahora tomamos V abierto regular de X tal que $x \in V$. Sea $A = cl(V)$, A es una vecindad cerrada de X y por hipótesis tenemos que $int(A) \cap P = \emptyset$, pero $int(A) = V$, por lo que $V \cap P \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 3.21. *Sean X un espacio topológico y A y B subconjuntos de X. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $(A)_\delta \subseteq (B)_\delta$*

2. *$A \subseteq (A)_\delta$*

Proposición 3.22. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces $cl(A) \subseteq (A)_\delta$.*

Demostración. Sea $x \in cl(A)$. Tomemos U una vecindad abierta de X tal que $x \in U$. Dado que $U \subseteq cl(A)$, $int(U) \subseteq int(cl(U))$ y $int(U) = U$, se sigue que $U \subseteq int(cl(U))$. Como $x \in cl(A)$ se sigue que $U \cap A \neq \emptyset$. Luego, $int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in (A)_\delta$. □

La siguiente proposición nos indica que la Definición 2.20 está íntimamente relacionada con la $\delta-$cerradura de un conjunto.

Proposición 3.23. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces A es $\delta-$cerrado si y sólo si $A = (A)_\delta$.*

Demostración. Supongamos que A es $\delta-$cerrado. Por la Proposición 3.21 sabemos que $A \subseteq (A)_\delta$. Ahora, supongamos que $(A)_\delta \nsubseteq A$. Entonces existe $x \in (A)_\delta$ tal que $x \notin A$. Luego $x \in X - A$. Pero como A es $\delta-$cerrado, $X - A$ es un $\delta-$abierto. Así existe H un abierto regular que satisface que $x \in H \subseteq X - A$. Es decir, $x \in H$ y $int(cl(H)) \cap A = \emptyset$. Lo cual es una contradicción ya que $x \in (A)_\delta$. Concluyendo que $A = (A)_\delta$.

Supongamos que $A = (A)_\delta$. Basta demostrar que $X - A$ es un $\delta-$abierto. Sea $x \in X - A$. Entonces $x \notin (A)_\delta$, por lo que existe una vecindad abierta U de x tal que $int(cl(U)) \cap A = \emptyset$. Sin embargo, $int(cl(U))$ es un abierto regular, y éste satisface que $x \in int(cl(U))$ y $int(cl(U)) \subseteq X - A$. Hemos demostrado que $X - A$ es un $\delta-$abierto. □

El siguiente teorema tiene cierta semejanza con el Teorema 3.2, específicamente con el inciso 1 y 2, compárelos para que compruebe su similitud.

Teorema 3.24. *Una función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es super continua si y sólo si $f((A)_\delta) \subseteq cl(f(A))$ para todo A subconjunto de X.*

Demostración. Consideremos al cerrado $cl(f(A)) \subseteq Y$. Por el Teorema 3.10 inciso c y dado que f es super continua se tiene que $f^{-1}(cl(f(A)))$ es δ-cerrado en X. Además $f(A) \subseteq cl(f(A))$ entonces $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$, pero $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, por lo que $A \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$. Por la Proposición 3.21 tenemos que $(A)_\delta \subseteq (f^{-1}(cl(f(A))))_\delta$. Entonces $f((A)_\delta) \subseteq f((f^{-1}(cl(f(A))))_\delta)$. Además, $f((f^{-1}(cl(f(A))))_\delta) \subseteq cl(f(A))$. Por lo tanto $f((A)_\delta) \subseteq cl(f(A))$.

Ahora supongamos que $f((A)_\delta) \subseteq cl(f(A))$ para todo A subconjunto de X. Sea F un cerrado de Y. Por hipótesis $f((f^{-1}(F))_\delta) \subseteq cl(f(f^{-1}(F))) \subseteq cl(F) = F$. Entonces $(f^{-1}(F))_\delta \subseteq f^{-1}(F)$. Por la Proposición 3.21 inciso 2, tenemos que $f^{-1}(F) \subseteq (f^{-1}(F))_\delta$. Así, $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F))_\delta$, es decir, $f^{-1}(F)$ es $\delta-$cerrado. Por el Teorema 3.10, se tiene que f es super continua. $\square$

Otro teorema muy interesante que relaciona la $\delta-$cerradura con las funciones super continuas es el siguiente.

Teorema 3.25. *Una función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es super continua si y sólo si $(f^{-1}(B))_\delta \subseteq f^{-1}(cl(B))$ para todo B subconjunto de Y.*

Demostración. Sean $B \subseteq Y$ y $x \in (f^{-1}(B))_\delta$. Veamos que $f(x) \in cl(B)$. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Como f es super continua existe U un abierto regular de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Luego $f^{-1}(B) \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in f^{-1}(B) \cap U$, entonces $f(y) \in B$ y $f(y) \in f(U)$, así $f(y) \in B \cap V$, por lo que $f(x) \in cl(B)$.

Ahora tomamos B un cerrado de Y. Por hipótesis tenemos que $(f^{-1}(B))_\delta \subseteq f^{-1}(B)$. Por la Proposición 3.21, $(f^{-1}(B))_\delta = f^{-1}(B)$. Lo que implica que $f^{-1}(B)$ es δ-cerrado. Finalmente por el Teorema 3.10, f es super continua.

63

□

Capítulo 4

Otras continuidades

En el capítulo anterior vimos a las funciones continuas y las funciones super continuas, en este capítulo veremos a unos tipos de funciones que no llegan a ser funciones continuas, ni super continuas pero si son importantes como lo veremos a continuación.

4.1. Funciones clopen continuas

Las funciones clopen continuas son una fascinante variación de las funciones continuas en el contexto de la topología, que combina conceptos de conjuntos abiertos y cerrados. Estas funciones preservan la estructura topológica de los conjuntos clopen. Esto las convierte en herramientas poderosas para analizar y comprender las propiedades topológicas de diversos espacios.

Definición 4.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **clopen continua**, si para cada $x \in X$ y para cada abierto V de Y que contiene a $f(x)$, existe un subconjunto clopen U de X tal que

$x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

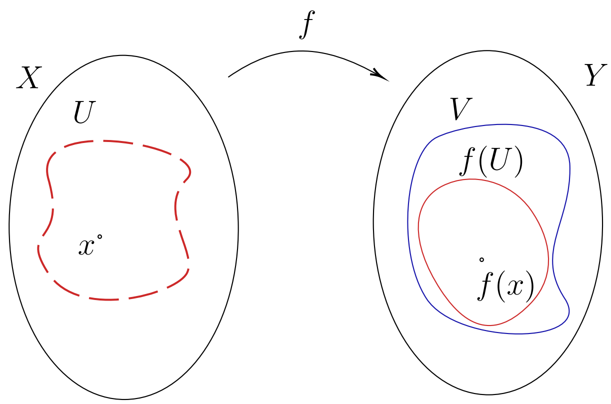


Figura 4.1: Función clopen continua

Ejemplo 4.2. La función identidad $f : (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $U \in \tau_u$ tal que $f(x) \in U$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$. Entonces $[x, x + \varepsilon)$ es un subconjunto clopen de $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ que contiene a x y que $f([x, x + \varepsilon)]) \subseteq U$. Por lo tanto, f es clopen continua.

En el Corolario 1.47 probamos que todo conjunto clopen es clopen regular, por lo que no sería extraño preguntarnos por la relación entre las funciones super continuas y las clopen continuas.

Proposición 4.3. *Toda función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ clopen continua es super continua.*

Demostración. Sea $x \in X$. Sabemos que f es clopen continua, entonces para cada abierto V que contiene a $f(x)$ existe un conjunto clopen U tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Por el Corolario 1.47, U es abierto regular y con esto f es super continua. $\square$

Por la Proposición 3.8, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4. *Si la función* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *es clopen continua, entonces* f *es continua.*

Teorema 4.5. *Sean* (X, τ_X) *un espacio conexo y* (Y, τ_Y) *un espacio* T_1*. Toda función clopen continua* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *es constante.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $y \in Y - \{f(x)\}$. Probaremos que $y \notin f(X)$.

Tenemos que $Y - \{y\} \in \tau_Y$ es tal que $f(x) \in Y - \{y\}$. Dado que f es clopen continua, existe un subconjunto clopen U de X tal que $f(U) \subseteq Y - \{y\}$. Como X es conexo, se tiene que $U = X$. Por lo que $f(X) \subseteq Y - \{y\}$. En otras palabras, $y \notin f(X)$. Por lo tanto, $f(X) = \{f(x)\}$, es decir, f es constante. $\square$

En el siguiente ejemplo veremos que el regreso del Corolario 4.4 no siempre es cierto.

Ejemplo 4.6. Sean X un espacio infinito $f : (X, \tau_{cof}) \longrightarrow (X, \tau_{cof})$ definida como $f(x) = x$. Sabemos que f es continua, pero f no es clopen continua por el Teorema 4.5.

Una variante de las funciones clopen continuas son las funciones casi clopen continuas que definimos a continuación.

Definición 4.7. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **casi clopen continua**, si para cada $x \in X$ y para cada abierto regular V de Y que contiene a $f(x)$, existe un subconjunto clopen U de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

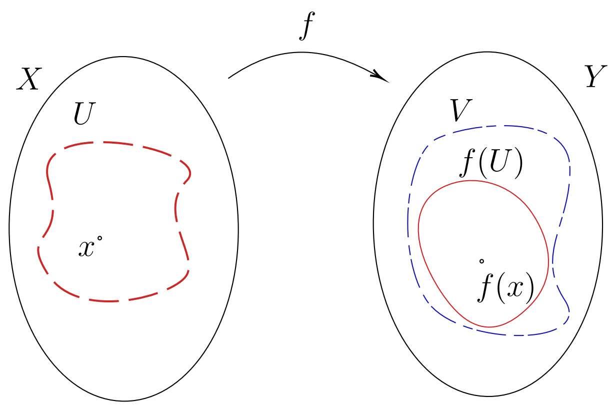


Figura 4.2: Función casi clopen continua

El nombre de las funciones clopen continuas y de las funciones casi clopen continuas nos hace pensar que hay una relación entre ellas, veámoslo en el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Si una función* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *es clopen continua, entonces es casi clopen continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y V un abierto regular de Y tales que $f(x) \in V$. Notemos que V es también un abierto. Como f es clopen continua entonces para V existe U un conjunto clopen de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Hemos probado que f es casi clopen continua. $\square$

La función presentada en el siguiente ejemplo es casi-clopen continua, pero no es continua. Esto muestra que el regreso del Teorema 4.8 no es cierto, y que ser casi clopen continua no implica ser super continua.

Ejemplo 4.9. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos una topología τ_R para X como sigue: $A \in \tau_X$ si y sólo si para cada $(x, y) \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon) \subseteq A$. A la topología τ_R le llamaremos **Topología del producto de la línea de Sorgenfrey en el semiplano**.

Probaremos que $[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$ es un subconjunto clopen en (X, τ_R). Claramente $[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$ es un abierto, solo falta demostrar que es un conjunto cerrado de X. Para ello probaremos que $X - [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$ es abierto. Sea $(a, b) \in X - [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$.

- Si $0 \leq b < y$. Sean $\delta = \frac{y-b}{2} > 0$ y $(p, q) \in [a, a+\delta) \times [b, b+\delta)$. Como $b \leq q < b+\delta$ y $\delta = \frac{y-b}{2}$, se tiene que

$$b \leq q < b + \tfrac{y-b}{2} = \tfrac{y+b}{2} < \tfrac{y+y}{2} = y$$

Luego, $q < y$. Por lo que $(p, q) \in X - [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$.

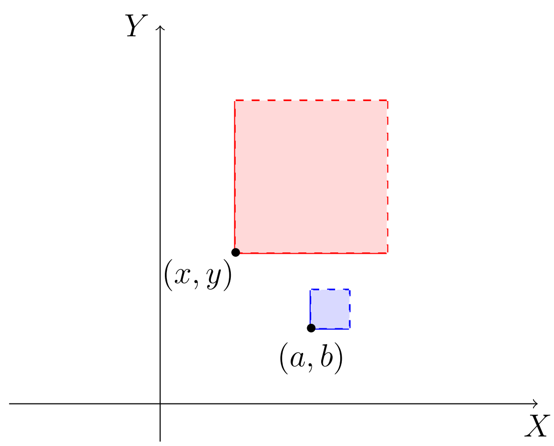


Figura 4.3: En el Ejemplo 4.9. Cuando $0 \leq b < y$.

- Si $a < x$. Sean $\delta = \frac{x-a}{2}$ y $(p, q) \in [a, a+\delta) \times [b, b+\delta)$. Como $a \leq p < a+\delta$ y $\delta = \frac{x-a}{2}$, se tiene que

$$p < a + \tfrac{x-a}{2} = \tfrac{x+a}{2} < \tfrac{x+x}{2} = x$$

Luego, $p < x$. Por lo que $(p, q) \in X - [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$.

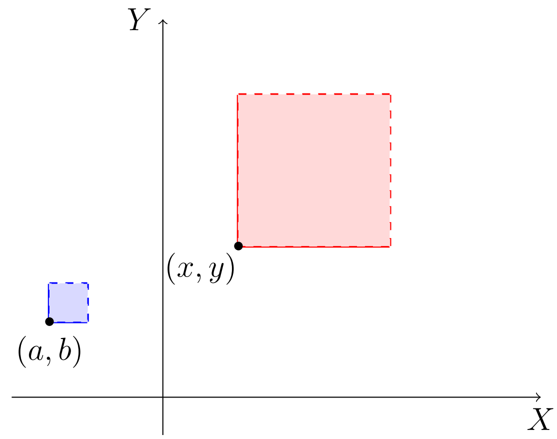


Figura 4.4: En el Ejemplo 4.9. Cuando $a < x$.

- Si $x + \varepsilon \leq a$. Sean $\delta > 0$ y $(p, q) \in [a, a+\delta) \times [b, b+\delta)$. Notemos que $a \leq p < a + \delta$ y $x + \varepsilon \leq a$, entonces $x + \varepsilon \leq a \leq p$. Así $x + \varepsilon \leq p$. Lo que nos lleva a que $(p, q) \in X - [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon)$.

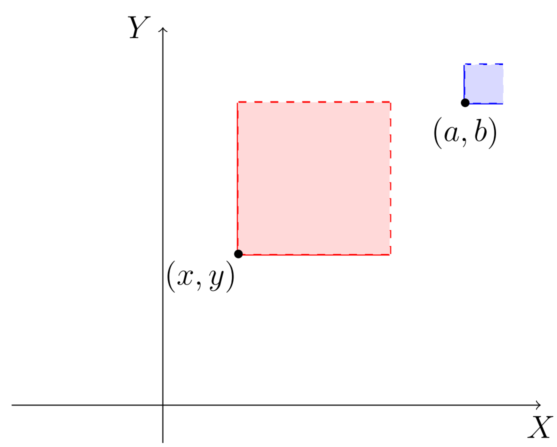


Figura 4.5: En el Ejemplo 4.9. Cuando $x + \varepsilon \leq a$.

- Si $y+\varepsilon \leq b$. Sean $\delta > 0$ y $(p, q) \in [a, a+\delta)\times[b, b+\delta)$. Como $y+\varepsilon \leq b \leq q$, entonces $y+\varepsilon \leq q$. Lo que nos lleva a que $(p,q) \in X-[x,x+\varepsilon)\times[y,y+\varepsilon)$.

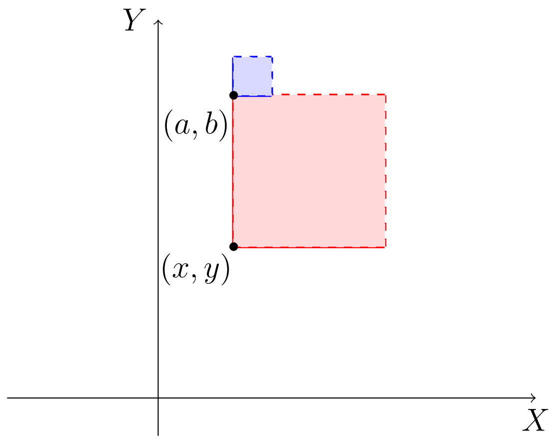


Figura 4.6: En el Ejemplo 4.9. Cuando $y+\varepsilon \leq b$.

Hemos probado que $[x,x+\varepsilon)\times[y,y+\varepsilon)$ es un conjunto cerrado.

Sea τ_D la Topología del medio disco para X definida en el Ejemplo 2.3.

Sea $f:(X,\tau_X)\to(X,\tau_D)$ la función identidad. Probaremos que f es casi clopen continua pero no es clopen continua.

Sea $(x,y)\in X$ y sea V un abierto regular de (X,τ_D) tal que $f(x,y)\in V$.

Supongamos que $y>0$. Entonces existe $\varepsilon\in(0,y)$ tal que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subseteq V$. Notemos que $[x,x+\varepsilon)\times[y,y+\varepsilon)$ es un subconjunto clopen de (X,τ_X) que contiene a (x,y) tal que $f([x,x+\varepsilon)\times[y,y+\varepsilon))\subseteq V$.

Ahora, supongamos $y=0$. Los argumentos usados en el Ejemplo 2.3 prueban que existe $\delta>0$ tal que $(x-\delta,x+\delta)\times[0,\delta)\subseteq V$. Así, $[x,x+\delta)\times[0,\delta)$ es un subconjunto clopen de (X,τ_X) que contiene a (x,y) tal que $f([x,x+\delta)\times[0,\delta))\subseteq V$. Por lo tanto, f es casi clopen continua.

Para mostrar que f no es clopen continua, sea $t>0$. Tenemos que $W=\{(0,0)\}\cup(-t,t)\times(0,t)$ es un subconjunto abierto de (X,τ_D) que contiene a $f(0,0)$. Si $U \in \tau_X$ es tal que $(0,0) \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $[0,r) \times [0,r) \subseteq U$ y con esto $(0, \frac{r}{2}) \in U$ satisface que $f((0, \frac{r}{2})) \notin W$. Por lo tanto f no es continua. En conclusión, no es super-continua y no es clopen continua, (ver Proposición 4.3, Corolario 4.3 y Teorema 4.8).

4.2. Funciones casi abiertas y funciones casi cerradas

Definición 4.10. Decimos que $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función **casi abierta** si $f(U) \in \tau_Y$ para todo abierto regular U de X. Se dice que es **casi cerrada** si $f(B)$ es un cerrado para todo subconjunto cerrado regular B de X.

En [10, Definición 4] definen a las funciones casi abiertas de manera distinta, pero en [10, Teorema 4] prueban que su definición y la que hemos dado aquí son equivalentes. Por lo que aquí escribimos esa definición como un resultado equivalente, (ver [10, Teorema 4]).

Teorema 4.11. *Una función $f : X \to Y$ es casi abierta si y sólo si $f(U) \subseteq int(cl(f(U)))$ para cada abierto U de X*

Proposición 4.12. *Si $f : X \to Y$ es una función inyectiva, entonces f es casi abierta si y sólo si f es casi cerrada.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que f es una función casi abierta. Sea B un cerrado regular de X. Como $X - B$ es un abierto regular de X y f es casi abierta, se tiene que $f(X - B)$ es un abierto de Y. Dado que f es inyectiva se cumple que $f(B) = Y - f(X - B)$. Luego, $Y - f(X - B)$ es un cerrado de Y, es decir, $f(B)$ es un cerrado de Y.

$\Longleftarrow$] Supongamos que f es una función casi cerrada. Sea U un abierto regular de X. Como $X - U$ es un cerrado regular de X y f es casi abierta, se tiene que $f(X - U)$ es un cerrado de Y. Dado que f es inyectiva se cumple que $f(U) = Y - f(X - U)$. Luego, $Y - f(X - U)$ es un abierto de Y, es decir, $f(U)$ es un abierto de Y. Concluyendo que f es casi abierta.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de regularidad en el dominio no puede omitirse en el teorema anterior.

Ejemplo 4.13. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Sea τ_R la topología del producto de la línea de Sorgenfrey definida en el Ejemplo 4.9 y sea τ_D la topología del medio disco definida en el Ejemplo 2.3.

Sea $f : (X, \tau_D) \to (X, \tau_R)$ la función identidad. Veremos que f es casi-abierta.

Sean U un abierto regular de (X, τ_D) y $(x, y) \in f(U)$. Si $y > 0$, entonces existe $\varepsilon \in (0, y)$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq U$ y con esto $[x, x + \varepsilon) \times [y, y + \varepsilon) \subseteq f(U)$. Ahora, supongamos que $y = 0$. Dado que U es un abierto regular de (X, τ_D), existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \times [0, \delta) \subseteq U$. De aquí que $[x, x + \delta) \times [y, \delta) \subseteq f(U)$. Por lo tanto, $f(U)$ es abierto.

Por el Teorema 4.12, se tiene que f es casi cerrada.

Finalmente, veremos que f no es supercontinua. Sea $U = [0, 1) \times [0, 1)$. Tenemos que $U \in \tau_R$ es tal que $f(0, 0) \in U$. Sea V un subconjunto abierto regular de (X, τ_D). Entonces existe $t > 0$ tal que $(-t, t) \times [0, t) \subseteq V$. Con esto, $(\frac{-t}{2}, 0) \in V$ es tal que $f(\frac{-t}{2}, 0) \notin U$. Por lo tanto, f no es supercontinua.

Teorema 4.14. *Sean* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *una función super continua y casi abierta y* $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ *una función. Entonces* $g \circ f$ *es super continua si y sólo si* g *es continua.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $g \circ f$ es super continua. Sea $U \in \tau_Z$. Por el Teorema 3.10 se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U)$ es un $\delta-$abierto. Dado que f es casi abierta, entonces $f((g \circ f)^{-1}(U))$ es un abierto. Sin embargo, $f((g \circ f)^{-1}(U)) = f(f^{-1}(g^{-1}(U))) = g^{-1}(U)$. Hemos demostrado que $g^{-1}(U)$ es un abierto. Por lo tanto g es continua.

$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que g es una función continua. Sea $A \in \tau_Z$, como g es continua, $g^{-1}(A) \in \tau_Y$ y dado que f es super continua, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es un δ-abierto, así $g \circ f$ es super continua. □

Teorema 4.15. *Si* $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *es una función donde* τ_Y *es una topología* δ*-cociente y* f *es inyectiva, entonces* f *es casi abierta.*

Demostración. Sea U un abierto regular de X. Basta demostrar que $f^{-1}(f(U))$ es un $\delta-$abierto de X.

Sea $x \in f^{-1}(f(U))$. Dado que f es inyectiva se tiene que $f^{-1}(f(U)) = U$, así $x \in U$. Como U es un abierto regular tal que $x \in U \subseteq f^{-1}(f(U))$, concluimos que f es casi abierta. □

4.3. Funciones casi continuas

Definición 4.16. Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función, decimos que f, es **casi continua** si para cada $x \in X$ y para cada abierto regular V de Y tal que $f(x) \in V$, existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

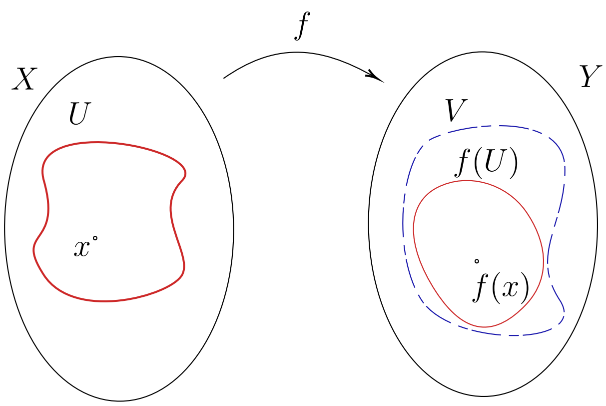


Figura 4.7: Función casi continua

De la definición de función casi continua y del hecho que todo abierto regular es un abierto, el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 4.17. *Si $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función continua, entonces f es casi continua.*

De la misma manera, dado que todo clopen es en particular un abierto, tenemos otro corolario.

Corolario 4.18. *Si $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función casi clopen continua, entonces f es casi continua.*

El regreso de la Proposición 4.18 no necesariamente es cierto. Veámos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.19. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos la topología τ_u como sigue: $A \in \tau_u$ si y sólo si para cada $(x, y) \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) \cap X \subseteq A$. Se tiene que (X, τ_u) es conexo.

Sea τ_D la topología del medio disco definida en el Ejemplo 2.3. Sea f :

$(X, \tau_u) \to (X, \tau_D)$ la función identidad. Veremos que f es casi continua pero no es casi clopen continua.

Sea $(x, y) \in X$ y sea V un abierto regular de (X, τ_D) tal que $f(x, y) \in V$.

Supongamos que $y > 0$. Elegimos $\delta \in (0, y)$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \times (y - \delta, y + \delta) \subseteq V$. Entonces $U = (x - \delta, x + \delta) \times (y - \delta, y + \delta) \in \tau_u$ es tal que $(x, y) \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

Ahora, supongamos que $y = 0$. Del hecho que V es abierto regular en (X, τ_D), existe $t > 0$ tal que $(x - t, x + t) \times [0, t) \subseteq V$. Tenemos que $U = (x - t, x + t) \times [0, t)$ es un subconjunto abierto de (X, τ_u) tal que $(x, y) \in U$ y $f(U) \subseteq V$. De lo anterior, f es casi-abierta.

Finalmente, $W = (-1, 1) \times [0, 1)$ es un subconjunto abierto regular de (X, τ_D) que contiene a $f(0, 0)$. De la conexidad de (X, τ_u) se sigue que el único subconjunto clopen de (X, τ_u) que contiene a $(0, 0)$ es X. Dado que $f(X)$ no es un subconjunto de W, f no es casi clopen continua.

A las funciones casi continuas, como su nombre lo dice, les “falta algo” para ser continuas y a las funciones super continuas les “sobra algo” para ser continuas, pero si las operamos entre ellas lo que le “falta” a las casi continuas se compensa con lo que les “sobra” a las super continuas. La demostración de esto que hemos dicho está a continuación.

Teorema 4.20. *Sean $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función casi continua y $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ una función super continua, entonces $g \circ f$ continua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $V \in \tau_Z$ tal que $g(f(x)) \in V$. Como g es super continua, existe un abierto regular U de Y tal que $f(x) \in U$ y $g(U) \subseteq V$. Dado que f es casi continua, existe $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$ y $f(W) \subseteq U$, entonces $g(f(W)) \subseteq g(U) \subseteq V$, por lo que $g \circ f$ es continua. $\square$

Capítulo 5

Continuidades fuertes

En el estudio de la topología (así como en otras ramas de la matemática), la continuidad de funciones es una propiedad fundamental que permite entender y manipular el comportamiento de las estructuras matemáticas. En este capítulo, exploraremos varias nociones de continuidad, cada una con sus propias características. Entre estas se encuentran las funciones fuerte continuas, completamente continuas, perfectamente continuas, δ-continuas, fuerte θ-continuas entre otras.

Empezamos dando varias definiciones y ejemplos de funciones las cuales generalmente son llamadas **continuidades fuertes**.

En algunas referencias definen a las funciones fuerte continuas como aquellas funciones f que satisfacen que $f(A) = f(cl(A))$ para todo $A \subseteq X$, lo cual es equivalente a la definición que hemos dado aquí.

Ejemplo 5.1. Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$ dotado con la topología usual y $Y = \{-1, 1\}$ con la topología $\{\emptyset, Y, \{1\}\}$. Véamos que la función f definida como: $f(x) = 1$ si $x > 0$, y $f(x) = -1$ si $x < 0$, es fuerte continua.

Sea $A \subseteq X$.

- Si $A \subseteq (-\infty, 0)$, entonces $cl(A) \subseteq (-\infty, 0)$. Por otro lado, $f(A) = \{-1\}$ y $f(cl(A)) = \{-1\}$. Por lo que $f(cl(A)) = f(A)$.

- Si $A \subseteq (0, \infty)$, también se tiene que $cl(A) \subseteq (0, \infty)$. Además, $f(A) = \{1\}$ y $f(cl(A)) = \{1\}$. Así, $f(cl(A)) = f(A)$.

- Si $A \cap (-\infty, 0)$ y $A \cap (0, \infty)$, se sigue que $cl(A) \cap (-\infty, 0)$ y $cl(A) \cap (0, \infty)$. Lo cual implica que $f(A) = \{-1, 1\}$ y $f(cl(A)) = \{-1, 1\}$.

Concluimos que f es fuerte continua.

Definición 5.2. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **fuerte θ-continua** si para cada $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$, existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(cl(U)) \subseteq V$.

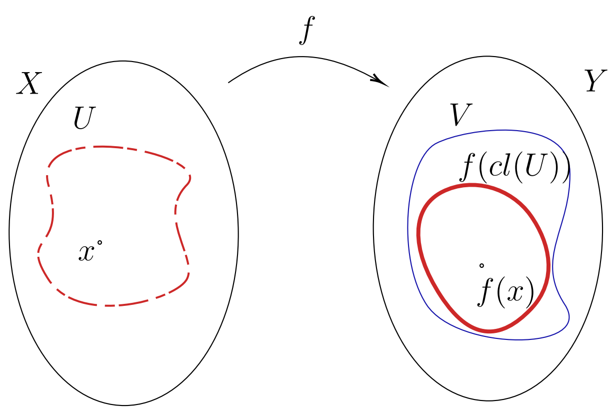


Figura 5.1: Función Fuerte θ-continua

Ejemplo 5.3. Sean $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $Y = \{a, b, c\}$, con $\tau_X = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \emptyset, X\}$ y $\tau_Y = \{\{c\}, \{a, b\}, \emptyset, Y\}$. Definimos la función f de la siguiente forma: $f(0) = a$, $f(1) = b$, $f(2) = f(3) = c$.

- Si $x = 0$, $f(0) = a$. Supongamos que $V = \{a, b\}$. Notemos que $U = \{0\}$ cumple que $cl(U) = \{0, 1\}$ y $f(\{0, 1\}) = \{a, b\} \subseteq V$.
- Si $x = 1$, $f(1) = b$. Supongamos que $V = \{a, b\}$. Notemos que $U = \{0, 1\}$ satisface que $cl(U) = \{0, 1\}$ y $f(\{0, 1\}) = \{a, b\} \subseteq V$.
- Si $x = 2$ o $x = 3$, se tiene que $f(x) = c$. Supongamos que $V = \{c\}$. $U = \{2, 3\}$ satisface que $cl(U) = \{2, 3\}$ y $f(\{2, 3\}) = \{c\} \subseteq V$.

Por lo tanto f es fuerte $\theta-$continua.

Definición 5.4. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **completamente continua** si para cada $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V)$ es un abierto regular de X.

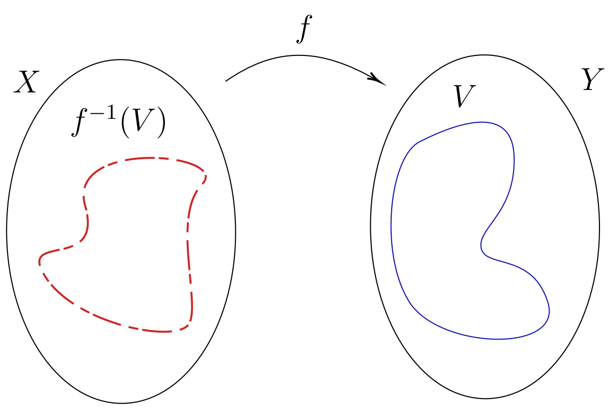


Figura 5.2: Función completamente continua

Ejemplo 5.5. Con los conjuntos X, Y y f la función definida como el Ejemplo 5,3 y con las topologías $\tau_X = \{\{1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \emptyset, X\}$ y $\tau_Y = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \emptyset, Y\}$ se tiene que f es una función completamente continua. Veámoslo.

- Si $V = \{b\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{1\}$,
- Si $V = \{a, b\}$, $f^{-1}(\{a, b\}) = \{0, 1\}$,
- Si $V = \{b, c\}$, $f^{-1}(\{b, c\}) = \{1, 2, 3\}$.

Notemos que $\{1\}, \{0, 1\}$ y $\{1, 2, 3\}$ son clopen, por lo tanto son abiertos regulares. Esto implica que f es completamente continua.

Definición 5.6. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **δ-continua** si para cada $x \in X$ y para cada abierto regular V que contiene a $f(x)$, existe un conjunto abierto regular U tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$

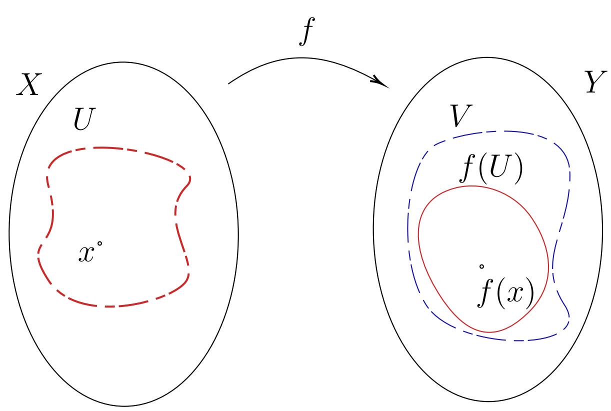


Figura 5.3: Función δ-continua

Ejemplo 5.7. Sean X, Y y f la función definida como el Ejemplo 5,3 con las siguientes topologías $\tau_X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}\} \cup \{\emptyset, X\}$ y $\tau_Y = \{\{a, b\}, \{c\}\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Por la definición de las topologías se tiene que $\{0, 1\}$ y $\{2, 3\}$ son abiertos y cerrados de X por lo que ambos conjuntos son abiertos regulares de X. Pasa lo mismo con $\{a, b\}$ y $\{c\}$, así $\{a, b\}$ y $\{c\}$ son abiertos regulares de Y.

- Si $x = 0$, $f(0) = a$. Luego $V = \{a, b\}$ satisface que $f(0) \in V$. Notemos que $U = \{0, 1\}$ cumple que $f(U) = \{a, b\}$,

- Si $x = 1$, $f(1) = b$. Luego $V = \{a, b\}$ satisface que $f(1) \in V$. Es claro que $U = \{0, 1\}$ cumple que $f(U) = \{a, b\}$,

- Si $x = 2$ o $x = 3$, $f(x) = c$. Luego $V = \{c\}$ satisface que $f(x) \in V$. Notemos que $U = \{2, 3\}$ cumple que $f(U) = \{c\}$.

Por lo que f es una función δ-continua.

Definición 5.8. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es **perfectamente continua** si $f^{-1}(V)$ es clopen en X, para todo abierto V de Y.

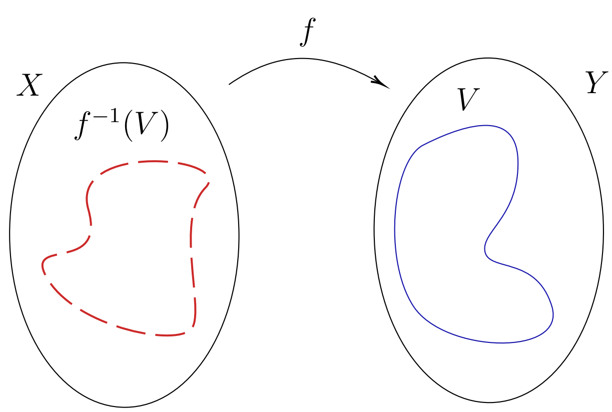


Figura 5.4: Función perfectamente continua

Ejemplo 5.9. Sean $X = \{0,1\}$ y $Y = \{a,b\}$ con $\tau_X = \{\{0\},\{1\},\emptyset,X\}$ y $\tau_Y = \{\{a\},\emptyset,Y\}$ y f la función definida como $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Notemos que $f^{-1}(\{a\}) = \{0\}$ el cual es clopen, además $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ son clopen.

Es ahora cuando empezamos a mencionar las relaciones que existen entre algunas de estas continuidades fuertes.

Corolario 5.10. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuerte continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sea A un subconjunto de X. Como f es fuerte continua, se tiene que $f(cl(A)) \subseteq f(A)$. Más aún, $f(cl(A)) \subseteq f(A) \subseteq cl(f(A))$. Con lo que $f(cl(A) \subseteq cl(f(A))$. Por el Teorema 3.2 inciso 2, concluimos que f es continua. □

Proposición 5.11. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuerte θ-continua, entonces es super continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y V un abierto de Y tal que $f(x) \in V$. Dado que f es una función fuerte θ-continua, existe un abierto U de Y tal que $x \in U$ y $f(cl(U)) \subseteq V$. Por el Teorema 1.31, tenemos que $W = int(cl(U))$ es un abierto regular de X y $x \in W$. Además $W \subseteq cl(U)$. Entonces $f(W) \subseteq f(cl(U))$. Así $f(W) \subseteq V$. Por lo que f es super continua. □

Teorema 5.12. *Si $f : (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es δ-continua y $g : (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ es super continua, entonces $g \circ f$ es super continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $W \in \tau_Z$ tal que $(g \circ f)(x) \in W$. Sabemos que $f(x) \in Y$ y $g(f(x)) \in W$. Dado que g es super continua, existe un abierto regular V de Y tal que $f(x) \in V$ y $g(V) \subseteq W$. A su vez f es δ-continua, por lo que existe un abierto regular U de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Concluimos que $g \circ f$ es super continua. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que no toda función super continua es una función fuerte θ-continua.

Ejemplo 5.13. Sean $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ y $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ la función identidad.

Veamos que f es super continua. Observemos que $\{a\}$ y $\{c\}$ son abiertos regulares, $int(cl(\{a\})) = int(\{a, b\}) = \{a\}$ y $int(cl(\{c\})) = int(\{b, c\}) = \{c\}$. Ahora tomamos $a \in X$, como f es la identidad $f(a) \in \{a\}$, $f(a) \in \{a, c\}$ y $f(a) \in X$. Si $f(a) \in \{a\}$, el propio $\{a\}$ funciona como el abierto regular que necesitamos. Si $f(a) \in \{a, c\}$, el abierto regular que funciona es $\{a\}$, pues $a \in \{a\}$ y $\{a\} \subseteq \{a, c\}$. Si $f(a) \in X$, al mismo X lo podemos tomar como el abierto regular que necesitamos.

Algo similar pasa con $c \in X$. Si tomamos $b \in X$, el único abierto en el que está $f(b)$ es X y tomamos a X como el abierto regular que queremos. Por lo que f es super continua.

Observemos que f no es fuerte θ-continua, pues para $a \in X$ y $\{a\} \in \tau$ se tiene que $cl(\{a\}) = \{a, b\}$, pero $f(\{a, b\}) \nsubseteq \{a\}$.

Proposición 5.14. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuerte continua, entonces f es fuerte θ-continua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Dado que f es fuerte continua, $f(cl(f^{-1}(V))) \subseteq f(f^{-1}(V))$. Por el Teorema 3.2, dado que f es continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto de X . Con esto, del hecho que $x \in f^{-1}(V)$ y $f(cl(f^{-1}(V))) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, se sigue que f es fuerte θ-continua. $\square$

Proposición 5.15. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuerte continua, entonces f es completamente continua.*

Demostración. Sea $V \in \tau_Y$. Vamos a demostrar que la imagen inversa de V bajo f es un abierto regular de X. Usando el hecho que f es continua, se obtiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. De esto se sigue que $f^{-1}(V) \subseteq int(cl(f^{-1}(V)))$. Por otro lado tenemos que $f(cl(f^{-1}(V))) \subseteq f(f^{-1}(V)) = V$ así $cl(f^{-1}(V)) \subseteq f^{-1}(V)$. Entonces

$$int(cl(f^{-1}(V))) \subseteq int(f^{-1}(V)) \subseteq f^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es un abierto regular de X. $\square$

Proposición 5.16. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuerte continua, entonces $cl(f^{-1}(E)) \subseteq f^{-1}(cl(E)))$ para $E \subseteq Y$.*

Demostración. Sea $E \subseteq Y$. Sabemos que f es fuerte continua, por lo que $f(cl(f^{-1}(E))) \subseteq cl(f(f^{-1}(E))) \subseteq cl(E)$. Entonces

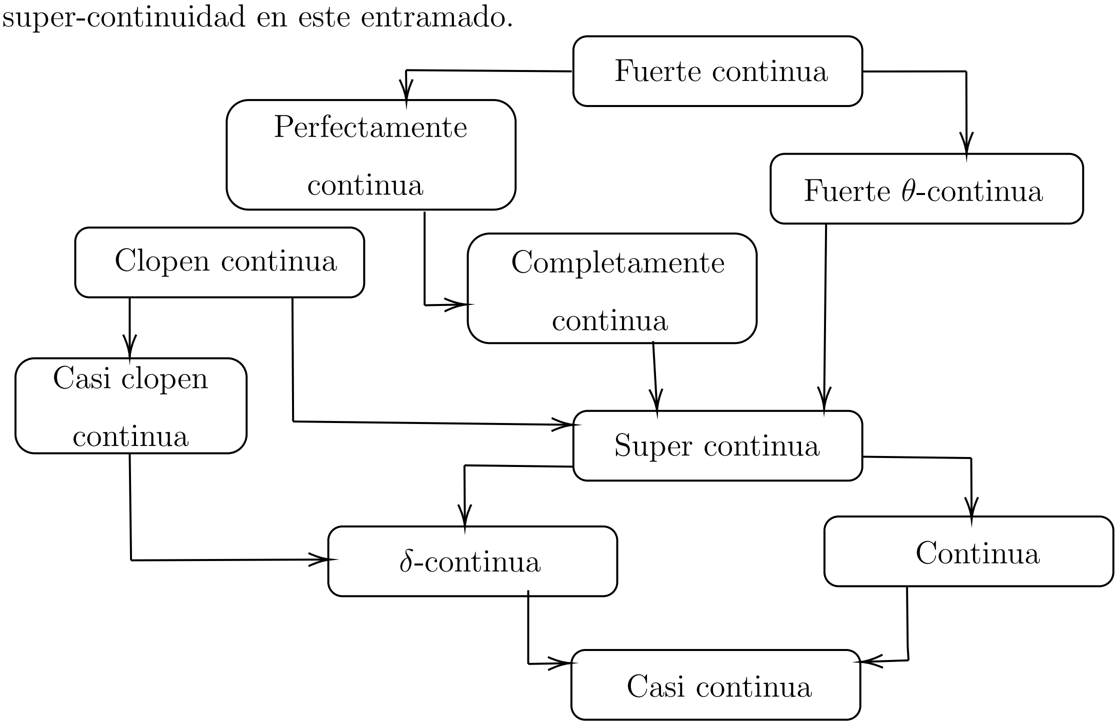
$$cl(f^{-1}(E)) \subseteq f^{-1}(f(cl(f^{-1}(E)))) \subseteq f^{-1}(cl(E)).$$

$\square$

Proposición 5.17. *Si una función $f : X \longrightarrow Y$ es perfectamente continua, entonces f es completamente continua.*

Demostración. Sea $V \in \tau_Y$. Dado que f es perfectamente continua, $f^{-1}(V)$ es clopen en X. Por el Corolario 1.47, tenemos que $f^{-1}(V)$ es abierto regular, por lo que f es completamente continua. $\square$

El siguiente diagrama sintetiza las relaciones de inclusión entre distintas clases de funciones continuas que se han desarrollado y analizado a lo largo de este trabajo. Cada tipo de continuidad representada refleja un nivel particular de restricción o propiedad topológica, desde las funciones clopen continuas hasta las funciones fuerte continuas. El propósito de este diagrama es ofrecer una visión estructurada de cómo se relacionan jerárquicamente estas nociones de continuidad, resaltando especialmente el papel intermedio que desempeña la super-continuidad en este entramado.



Bibliografía

[1] Baker C. W., *On super continuous functions*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 22(1), 17-22, 1985.

[2] Hsin, Ching I. and Liu, Pin Ying, *Weak and strong continuity*, Department of Mathematics, Guilford College, Vol. 25, 1993.

[3] Engelking R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, 1989.

[4] Kuratowski K., *Topology: Volume I*, Elsevier, 2014.

[5] Munkres, J. R., *Topología*, 2^a edición. Pearson Educación, S. A., Madrid, 2002.

[6] Munshi B. M., Bassan D. S., *Super-continuous mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. 13, 229, 1982.

[7] Noiri, T., *On* $\delta-$*continuous functions*, Journal of the Korean Mathematical Society, 16(2), 161-166, 1980.

[8] Noiri T., *Super-continuity and some strong forms of continuity*, Indian J. Pure Appl. Math. 15, 241, 1984.

[9] Reilly I. L., M. K. Vamanamurthy, *On super-continuous mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. 14, 767, 1983.

[10] Rose, D. A., *Weak openness and almost openness*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 7(1), 35-40, 1984.

[11] Steen, L. A., Seebach, J. A., *Counterexamples in topology*, Vol. 18, New York: Springer, 1978.

Índice alfabético